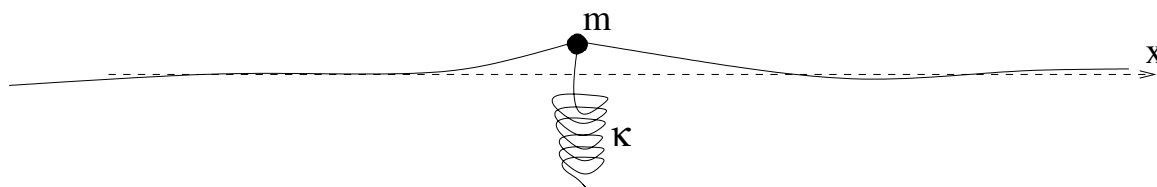


(Desarrolle sus respuestas y **cuide la presentación.**)

I Transmisión de señales a través de un oscilador

Consideramos una cuerda infinita con densidad lineal de masa σ constante, que coincide con el eje x en ausencia de pequeñas oscilaciones. Una masa m divide la cuerda en $x = 0$, en el extremo de un resorte orientado en dirección y . El largo natural del resorte deja la masa en $(x, y) = (0, 0)$, y su constante es κ . El movimiento de la masa y el desplazamiento transversal la cuerda $u(x, t)$ están confinado al plano horizontal (x, y) , perpendicular a la vertical dada por la dirección de gravedad.



1. (2 pt) Consideramos el problema de transmisión de una onda monocromática proveniente de $-\infty$, con amplitud A , número de onda k y frecuencia angular ω .

- Escriba las condiciones de borde en el origen, que permiten calcular la relación entre la amplitud transmitida C y la incidente A .
- Justifique que el flujo de energía en la cuerda es $\langle S \rangle = \epsilon c$, en que $\epsilon = \langle \frac{1}{2} \sigma \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \rangle$, y que en el caso de la onda incidente, $\langle S \rangle = \frac{1}{2} \tau k^2 c \|A\|^2$.
- Muestre que el coeficiente de transmisión es

$$T(k) \equiv \langle S_{\text{transmitido}} \rangle / \langle S_{\text{incidente}} \rangle = 1 / \left[1 + \left(\frac{mc^2 k^2 - \kappa}{2\tau k} \right)^2 \right].$$

- Discuta el comportamiento de $T(\omega)$.

2. (4 pt) Consideramos ahora una señal proveniente de $-\infty$, tal que $u_{\text{inc}}(x, t) = u_o \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x-ct)^2}{\sigma^2} \right]$.

- ¿Cuál es la relación de dispersión de la cuerda en $x \neq 0$? ¿Es un medio dispersivo? ¿Con qué velocidad y en qué dirección se desplaza la señal?
- La descomposición espectral de $u(x, t)$ es $u_{\text{inc}}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk A(k) \exp(i(kx - \omega t))$. Muestre que el espectro incidente también es una Gaussiana,

$$A(k) = \frac{u_o}{\sqrt{2\pi}} \sigma \exp \left[-\frac{1}{2} (k^2 \sigma^2) \right], \quad \text{con dispersión } \sigma_k = 1/\sigma.$$

- Escriba una expresión para la energía total de la señal incidente, en $t \rightarrow -\infty$.
- Escriba el espectro transmitido, $C(k)$.

- e) Escriba una expresión que permita calcular la forma de la señal transmitida en $x > 0$, $u_{\text{trans}}(x, t)$.
- f) Escriba una expresión para la energía transmitida por el oscilador, en $t \rightarrow +\infty$.

II Dispersión del paquete de ondas

Considere una señal 1D $\psi(x, t)$, propagándose en dirección $+\hat{x}$, cuyo espectro es Gaussiano con dispersión $\sigma(t = 0) = \alpha$, centrado en ω_0 . Muestre que el espectro se dispersa para $t > 0$, con

$$\sigma(t > 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\alpha^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \Big|_{k_0} \frac{t}{2\alpha^2} \right)^2}.$$

Escriba $\psi(x, t)$.

III Atenuación de una onda entrando en un medio viscoso

Estudiamos la propagación de ondas entrando en un medio dispersivo. Consideramos el caso de una cuerda infinita, oscilando libremente en $x < 0$, pero inmersa en un medio viscoso en $x \geq 0$. La densidad lineal σ y la tensión en la cuerda τ son constantes.

1. (2.0 pt) Consideramos la propagación de la onda en el medio viscoso.

- a) El roce ejercido por el medio viscoso sobre un elemento de cuerda de largo dx es $\vec{f} = -\chi \frac{\partial u}{\partial t} dx \hat{y}$, en que χ es constante y $\hat{y} = \vec{u}/|\vec{u}|$. Demuestre que la ecuación de movimiento para $u(x, t)$ en $x > 0$ es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\chi}{\tau} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

- b) Demuestre que la relación de dispersión en el medio viscoso es

$$\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \frac{i\chi\omega}{\tau} - k^2 = 0.$$

- c) Demuestre que ω es real, y concluya que $k = k_R + ik_I$ en el plano complejo. Dé unas expresiones para k_R y k_I en función de ω .
- d) Grafique cualitativamente $u(x, t = t_0)$ en $x > 0$, dado $u(x = 0, t = t_0)$.
- e) ¿Cuál es la velocidad con la cual se puede propagar información en el medio viscoso?

2. (4.0 pt) Consideramos el caso de una onda monocromática con amplitud A incidiendo en $x = 0$ desde $x = -\infty$, con flujo de energía S_i . Al entrar en el medio parte de la onda es reflejada, con amplitud B y flujo S_r , mientras que otra parte es transmitida, con amplitud C y flujo S_t .

- a) Imponga continuidad de $u(x, t)$ y de $\partial u / \partial x$ para obtener unas relaciones entre A , B y C .
- b) Calcule los coeficientes de transmisión, $T = \langle S_t \rangle / \langle S_i \rangle$, y de reflexión $R = \langle S_r \rangle / \langle S_i \rangle$, en que $\langle \rangle$ denota promedio temporal.
- c) ¿Cuanta potencia es disipada por el medio viscoso en función de ω ?