Control 1
FI3001-1 2015B

tiempo: **3 h**

I Pequeñas oscilaciones: teoría.

Sean $V\left(\{q_i\}_{i=1}^n\right)$ y $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m\dot{x}_i{}^2$ las energías potencial y cinética que describen un sistema de N partículas con n grados de libertad, coordenadas cartesianas $x_j\left(\{q_i\}_{i=1}^n\right)$, $j = 1, \ldots, 3N$, y coordenadas generalizadas $q_j\left(\{x_i\}_{i=1}^{3N}\right)$, $j = 1, \ldots, n \leq N$. Elijimos un sistema de coordendas generalizadas tal que $\{q_i\}_{i=1}^n = 0$ en equilibrio.

1. `( 0.5 pt)` Demuestre que en torno a los puntos de equlibrio T y V son formas cuadráticas,

$$V \approx \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n v_{jk}q_jq_k \tag{1}$$

$$T \approx \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n m_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k, \tag{2}$$

   donde las matrices $\tilde{v}$ y $\tilde{m}$ son constantes y simétricas ($v_{jk} = v_{kj}$, $m_{jk} = m_{kj}$).

2. `( 0.5 pt)` Usando las ecuaciones de Lagrange, muestre que las ecuaciones de movimiento tienen la forma

$$\sum_{k=1}^n (v_{lk}q_k + m_{lk}\ddot{q}_k) = 0, \qquad \forall\ l = 1, \ldots, n \tag{3}$$

3. `( 0.5 pt)` ¿ A qué corresponden los "modos normales" del sistema? ¿ Cuantos hay?

4. `( 0.5 pt)` Suponga soluciones en modos normales y muestre que la ecuación para las frecuencias características está dada por

$$\det(\tilde{v} - \omega^2\tilde{m}) = 0. \tag{4}$$

5. `( 1.0 pt)` Desmuestre que, para dos frecuencias características distintas ω^s y ω^t, los modos normales correspondientes $\rho_k^{s,t}$ satisfacen una relación de ortonormalidad:

$$\sum_{j,k} \rho_j^s m_{jk}\rho_k^t = \delta_{st}. \tag{5}$$

6. `( 1.0 pt)` ¿ Qué ocurre en el caso degenerado, $\omega^s = \omega^t$? Muestre que en el caso degenerado se pierde información sobre los modos normales, en el sentido que no cumplen automáticamente Ec. 5. ¿ Cómo contruiría en el caso degenerado un conjunto de modos normales ortonormales según Ec. 5?

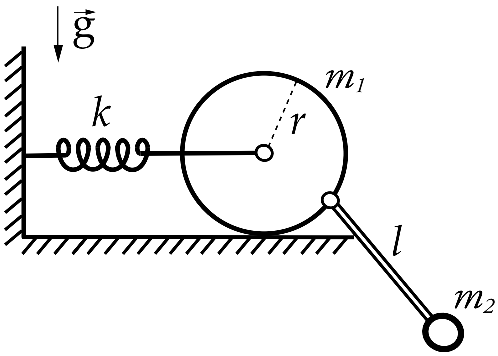
7. `( 1.0 pt)` Muestre que existe un sistema de coordenadas generalizadas naturales que desacoplan el problema mecánico. Dé la relación entre estas coordenadas naturales y $\{q_l\}$, y su inverso.

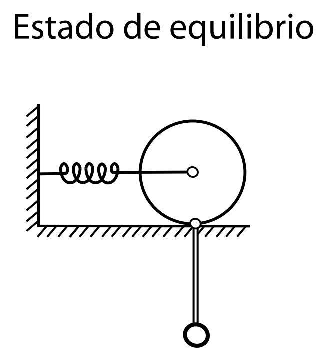
8. `( 1.0 pt)` Escriba una expresión general para la solución del problema mecánico, $q_l(t)$. ¿ Cómo implementaría las condiciones iniciales sobre $\{q_l, \dot{q}_l\}(t = 0)$ para particularizar la solución general?

II Pequeñas oscilaciones: aplicaciones.

1. Un aro de masa m_1 y radio r, que rueda sin resbalar, está unido a un resorte, de contante elástica k, desde su centro y el otro extremo del resorte está fijo a la pared. Sujeto al borde del aro hay un péndulo de largo l y masa m_2. Suponga que en equilibrio el resorte está con su largo natural y el péndulo está en linea vertical con el centro del aro.

   - `( 1.0 pt)` Encuentre las frecuencias propias del sistema.
   - `( 1.0 pt)` Encuentre los modos normales de oscilación del sistema.
   - `( 1.0 pt)` En $t = 0$ el sistema está en su posición de equilibrio, el péndulo es impulsado con velocidad $v_\circ$. Calcule y grafique la trayectoria del sistema.





2. Un bloque uniforme de masa m, largo a y altura b está sostenido por dos resortes, uno en cada extremo. Las constantes elásticas de los resortes son k_1 y k_2, con $k_1 = k_2 = k$. Los resortes se mantienen verticales.

   - `( 1.0 pt)` Escriba el Lagrangeano si la energía cinética del bloque es $T = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$, con $I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$, y en que V es la velocidad del centro de masa, y θ es un ángulo.
   - `( 1.0 pt)` Encuentre las frecuencias propias del sistema.
   - `( 1.0 pt)` Encuentre los modos normales de oscilación del sistema.