Control 2
FI3001-1 2015B

tiempo: **3 h**

I Cuerda circular discreta y continua.

1. `(1.5 pt)` Propiedades generales de la cuerda discreta.

   a) Muestre que el Lagrangeano para N masas m en una cuerda, con desplazamiento transvesales μ_i y separadas por una distancia a, es

   $$L = T - V = \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{N}(\dot{\mu}_i)^2 - \frac{\tau}{2a}\sum_{i=0}^{N}(\mu_{i+1}-\mu_i)^2 \ .$$

   b) Introducimos una función $\mu(x)$ tal que $\mu(x_i) = \mu_i$, en que x_i es la coordenada en reposo de la partícula i. Demuestre que para soluciones en modos normales de la forma $\mu(x) = \mathrm{Re}\left[A\exp(i(kx - wt))\right]$ es necesario que

   $$\omega^2 = \frac{4\tau}{ma}\sin^2(ka/2).$$

2. `(1.5 pt)` Límite continuo.

   a) Tome el límite continuo para obtener el Lagrangeano L de una cuerda de largo total $l = Na$.

   b) Escriba la densidad Lagrangeana λ tal que $L = \int_{x=0}^{l} dx\lambda(x)$, y la densidad Hamiltoniana de la cuerda. ¿Cuál es la densidad de energía ϵ en la cuerda?

3. `(1.5 pt)` Cuerda circular discreta.

   a) Consideramos una cuerda discreta con forma de círculo. Aplique las condiciones de borde correspondientes para obtener la forma exacta de los N modos normales, y el valor de las frecuencias de oscilación.

   b) Consideramos el caso de una condición inicial en reposo, con $\mu(x, t = 0) = a/l$, si $x \in [-\frac{l}{2} - a, -\frac{l}{2} + a]$, $\mu(x, t = 0) = 0$ si no. Calcule el movimiento del sistema de N masas para todo t.

4. `(1.5 pt)` Cuerda circular continua.

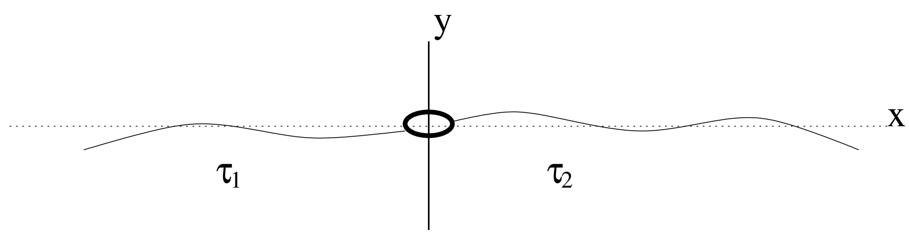
   a) Si $a \ll l$, la cuerda es efectivamente un medio continuo. ¿Qué ecuación rige el movimiento de la cuerda? ¿Cuál es la relación de dispersion $\omega(k)$ para la propagación de ondas monocromáticas?

   b) Describa la propagación ulterior de la señal con la condición inicial del Punto 3, ignorando por el momento el hecho que la señal tiene dimensiones comparables a la distancia intermasas.

   c) ¿Dado que la señal es del orden de la separación entre las masas a, qué relación de dispersión $\omega(k)$ usaría? Comente sobre la propagación de la señal en este caso (ayuda: considere su descomposición en modos normales).

II Cuerda infinita con una argolla en el origen

Consideramos una cuerda infinita con densidad lineal de masa σ constante, que coincide con el eje x en ausencia de pequeñas oscilaciones. Una argolla con masa m divide la cuerda en $x = 0$, y una barra fija y perpendicular a la cuerda (en dirección y) pasa por la argolla. Las tensiones en la cuerda es τ_1 para $x < 0$ y τ_2 para $x > 0$, con $\tau_2 = 2\tau_1$, tal como se indica en la Figura. La argolla tiene un movimiento confinado al plano horizontal (x, y).



1. `(1 pt)` ¿Cual es la proyección segun y de la resultante de fuerzas de tensión ejercidas sobre la argolla?
2. `(1 pt)` Escriba la ecuación de movimiento de la argolla.
3. `(1 pt)` Plantee las condiciones de bordes en $x = 0$ para el problema de transmisión y reflexión de una onda viajera proveniente desde $-\infty$.
4. `(1.0 pt)` Relacione las amplitudes de las ondas reflectada y transmitidas, B y C, con la amplitud A de una onda monocromática proveniente de $-\infty$ con número de onda k.
5. `(0.5 pt)` El vector flujo de energía es $S = -\tau(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\hat{x}$, donde u es el desplazamiento de la cuerda. Muestre que el promedio temporal de S es, en valor absoluto:

$$\|\langle S \rangle\| \equiv \| \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T S(t)\| = \frac{1}{2}A^2(\tau k^2 c),$$

   para número de onda k y velocidad de fase c.
6. `(1.0 pt)` Escribir en función de τ_1 y τ_2 las expresiones para $R = \langle S_{\text{reflectado}}\rangle / \langle S_{\text{incidente}}\rangle$, y $T = \langle S_{\text{transmitido}}\rangle / \langle S_{\text{incidente}}\rangle$.
7. `(0.5 pt)` Si el flujo de energía incidente es P_{in}, ¿cuanta energía es transmitida por la argolla por unidad de tiempo?