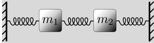
Vibraciones y Ondas

2015

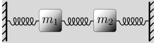
Simon Casassus Astronomía, Universidad de Chile
http:://www.das.uchile.cl/∼simon

Parte II

Pequeñas Oscilaciones

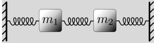


Plan



Solución general
Formulación
Modos normales
Solución general
Coordenadas Normales
Matriz modal
Coordenadas normales
Muchos grados de libertad
Problemas de *N* cuerpos
Frecuencias normales
Modos normales
Límite contínuo
Paso al contínuo
Solución en modos normales
Lagrangeano para la cuerda
Coordenadas normales
Mínimia acción en medios contínuos
Hamiltoniano

Plan



Solución general
Formulación
Modos normales
Solución general
Coordenadas Normales
Matriz modal
Coordenadas normales
Muchos grados de libertad
Problemas de *N* cuerpos
Frecuencias normales
Modos normales
Límite contínuo
Paso al contínuo
Solución en modos normales
Lagrangeano para la cuerda
Coordenadas normales
Mínimia acción en medios contínuos
Hamiltoniano

1.1-Formulación

- Vamos a considerar perturbaciones en torno al equilibrio de un sistema conservativo, con constricciones independientes de t.
- Energía cinética en coord. gen.:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\sigma,\lambda} m_{\sigma\lambda}\dot{q}_\sigma \dot{q}_\lambda, \text{ con } \sigma, \lambda = 1, \cdots, n,$$

donde $m_{\sigma\lambda} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma}\frac{\partial x_i}{\partial q_\lambda}$.

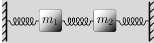
- Perturbaciones: $q_\sigma = \bar{q}_\sigma + \eta_\sigma$.
- En equilibrio, $Q_\sigma \equiv \frac{\partial V}{\partial q_\sigma} = 0$, y

$$V \approx V_\circ + \sum_{\sigma,\lambda} \frac{1}{2} \overbrace{\left.\frac{\partial V^2}{\partial q_\sigma \partial q_\lambda}\right|_{\{\bar{q}_\sigma\}}}^{v_{\sigma\lambda}} \eta_\sigma \eta_\lambda.$$

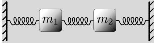
- El Lagrangeano es

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{\sigma,\lambda} m_{\sigma\lambda}\dot{\eta}_\lambda\dot{\eta}_\sigma - v_{\sigma\lambda}\eta_\sigma\eta_\lambda \tag{1}$$

$$\Rightarrow \sum_{\lambda} m_{\sigma\lambda}\ddot{\eta}_\lambda + v_{\sigma\lambda}\eta_\lambda = 0. \tag{2}$$



Plan

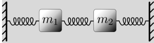


Un grado de libertad

- $m_{\sigma\lambda} \equiv m$, $v_{\sigma\lambda} \equiv k$.
- Solución de Eq. 2 es $\eta = \mathrm{Re}(z)$,

$$
\begin{aligned}
z(t) &= z_+ e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + z_- e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}, \;\; \text{si } k > 0, \\
z(t) &= z_+ e^{\sqrt{\frac{k}{m}}t} + z_- e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}, \;\; \text{si } k < 0,
\end{aligned}
$$

- $$\Rightarrow \eta = \rho \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right).$$



n grados de libertad

- Pasando a $\mathbb{C}$, Eq. 2 se escribe

$$\sum_{\lambda} m_{\sigma\lambda}\ddot{z}_{\lambda} + v_{\sigma\lambda} z_{\lambda} = 0, \text{ con } \eta_{\sigma} = \Re(z_{\sigma}). \qquad (3)$$

- Buscamos soluciones de Eq. 3 en modos normales, en que todas las coordenadas oscilan con la misma frecuencia:

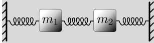
$$z_{\sigma} = z_{\sigma}^{s} \exp(i\omega t).$$

- Sustitución en Eq. 3 da

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \underbrace{\left(v_{\sigma\lambda} - \omega^{2} m_{\sigma\lambda}\right)}_{a_{\sigma\lambda}} z_{\lambda}^{s} = 0 \qquad (4)$$

- Eq. 4 tiene soluciones no triviales solo si $\det(a_{\sigma\lambda}) = 0$,

$$\left|v_{\sigma\lambda} - \omega^{2} m_{\sigma\lambda}\right| = 0 \;\Rightarrow\; n \text{ raíces complejas } \omega_{s}^{2},\; s = 1, \cdots, n.$$



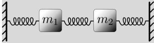
n grados de libertad

- Props: los ω_s^2 son reales positivos (ver demo en clase).
- Como $\det(a_{\sigma\lambda}) = 0$, una de las n ecuaciones en Eq. 4 es combinación lineal de las otras. Eliminando la n-esima, la Ley de Cramer nos da z_σ:

$$
\begin{aligned}
a_{1,1}\frac{z_1}{z_n} + \cdots + a_{1,(n-1)}\frac{z_{n-1}}{z_n} &= -a_{1,n} \\
&\vdots \qquad \vdots \\
a_{(n-1),1}\frac{z_{n-1}}{z_n} + \cdots + a_{(n-1),(n-1)}\frac{z_{n-1}}{z_n} &= -a_{(n-1),n}
\end{aligned} \tag{5}
$$

- Vemos que z_σ^s / z_n es real porque todos los coefs $a_{\sigma\lambda}$ son reales.

$$\Rightarrow z_\sigma^s = e^{i\phi_s}\rho_\sigma^s, \text{ con } (\phi_s, \rho_\sigma^s) \in \mathbb{R}. \tag{6}$$



Modos ortonormales

- Sustitución de Eq. 6 en Eq. 3 y combinando dos frecuencias normales s y t lleguamos a

$$\sum_{\lambda\sigma} \rho_\sigma^t m_{\sigma\lambda} \rho_\lambda^s = \delta_{st} \tag{7}$$

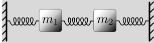
- El modo normal correspondiente a la frecuencia normal (o ‘autovalor’) es

$$z_\sigma^s = C^s e^{i\phi_s} \rho_\sigma^s,$$

en que C^s y ϕ^s son las únicas constantes reales por especificar.

Plan

1. **Solución general**
    - Formulación
    - Modos normales
    - Solución general
2. **Coordenadas Normales**
    - Matriz modal
    - Coordenadas normales
3. **Muchos grados de libertad**
    - Problemas de *N* cuerpos
    - Frecuencias normales
    - Modos normales
4. **Límite contínuo**
    - Paso al contínuo
    - Solución en modos normales
    - Lagrangeano para la cuerda
    - Coordenadas normales
    - Mínimia acción en medios contínuos
    - Hamiltoniano



1.3-Solución general

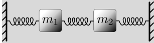
- $z_\sigma(t) = \sum_{s=1}^{n} (z_+^s)_\sigma e^{i\omega_s t} + (z_-^s)_\sigma e^{-i\omega_s t}, \ \sigma = 1, \cdots, n.$
- Tomando parte real, $\eta_\sigma = \frac{1}{2}(z_\sigma^s + z_\sigma^{s*})$, y definiendo $(z_+^s)_\sigma + (z_+^s)_\sigma^* = C^s \rho_\sigma^s e^{i\phi_s}$, lleguamos a

$$\eta_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \rho_\sigma^s C^s \cos(\omega_s t + \phi_s).$$

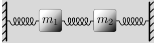
- para determinar las constantes ϕ_s y C^s se usan las condiciones iniciales, $\eta_\sigma(0)$ y $\dot{\eta}_\sigma(0)$, y usando Eq. 7,

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma,\lambda} \rho_\lambda^t m_{\lambda,\sigma} \eta_\sigma(0) &= C^t \cos(\phi_t) \\ \sum_{\sigma,\lambda} \rho_\lambda^t m_{\lambda,\sigma} \dot{\eta}_\sigma(0) &= -\omega_t C^t \sin(\phi_t) \end{aligned}$$

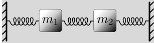
$\Rightarrow$ despejamos C^t y $\tan(\phi_t)$.



Plan



Plan



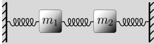
2.1-Matriz modal

- Definimos la matriz modal $\mathcal{A}_{\lambda\sigma} = \rho^{\sigma}_{\lambda}$, es una matriz cuadrada independiente de las condiciones iniciales.
- prop.: la matriz modal diagonaliza la matriz masa $m_{\lambda\sigma}$:

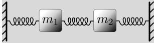
$$\mathcal{A}^T m \mathcal{A} = \mathbb{I}.$$

- prop.: la matriz modal diagonaliza la matriz potencial $v_{\lambda\sigma}$:

$$\mathcal{A}^T v \mathcal{A} = \mathbb{I}.$$



Plan



2.2-Coordenadas normales

- Definimos un nuevo set de coordenadas generalizadas, ζ_σ, con

$$\eta(t) = \mathcal{A}\zeta(t), \text{ o bien, } \mathcal{A}^T\, m\, \eta(t) = \zeta(t).$$

- El Lagrangeano Eq. 1 se escribe

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\sigma,\lambda} m_{\sigma\lambda}\dot{\eta}_\lambda\dot{\eta}_\sigma - v_{\sigma\lambda}\eta_\sigma\eta_\lambda = \frac{1}{2}\sum_{\sigma}(\dot{\zeta}_\lambda)^2 - \omega_\sigma^2\zeta_\sigma^2$$

- Las ecuaciones de movimiento son entonces

$$\ddot{\zeta}_\sigma = -\omega_\sigma^2\zeta_\sigma,\ \sigma = 1, \cdots, n.$$

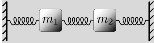
- Vemos que las coordenadas normales desacoplan el problema de pequeñas oscilaciones. Las soluciones son,

$$\zeta_\sigma = C^\sigma \cos(\omega_\sigma t + \phi_\sigma), \text{ y usando la definición de } \zeta_\sigma,$$

$$\eta_\lambda = \sum_\sigma \rho_\lambda^\sigma C^\sigma \cos(\omega_\sigma t + \phi_\sigma).$$

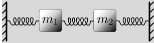
Ejemplos

- Dos péndulos acoplados
- Ortogonalización de Graham-Schmidt (Fetter 4.10)

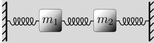


Plan

1. **Solución general**
   - Formulación
   - Modos normales
   - Solución general
2. **Coordenadas Normales**
   - Matriz modal
   - Coordenadas normales
3. **Muchos grados de libertad**
   - Problemas de N cuerpos
   - Frecuencias normales
   - Modos normales
4. **Límite contínuo**
   - Paso al contínuo
   - Solución en modos normales
   - Lagrangeano para la cuerda
   - Coordenadas normales
   - Mínimia acción en medios contínuos
   - Hamiltoniano

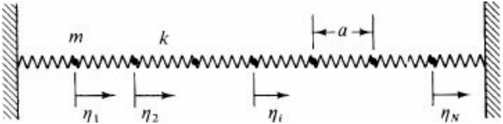


Plan



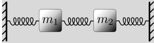
3.1-Problemas de N cuerpos

- Modelo de red cristalina $1-D$.



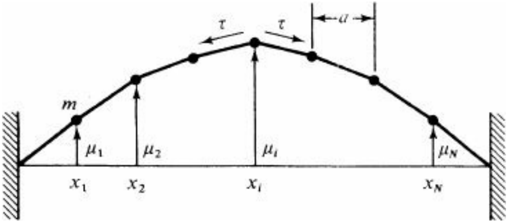
$$L=\frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{N}\dot{\eta}_i^2-\frac{1}{2}k\sum_{i=0}^{N}(\eta_{i+1}-\eta_i)^2,\ \text{con } \eta_0=\eta_{N+1}=0,$$

$$m\ddot{\eta}_i+2k\eta_i-k(\eta_{i+1}+\eta_{i-1})=0,\ \ i=1,\cdots,N.$$



3.1-Problemas de *N* cuerpos

- Oscilaciones transversas de N masas en una cuerda sin masa.



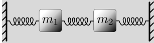
Mécanica vectorial da ec. de mov.:

$$m\ddot{\mu}_i + \frac{2\tau}{a}\mu_i - \frac{\tau}{a}(\mu_{i+1} + \mu_{i-1}) = 0 \text{ con } \mu_0 = \mu_{N+1} = 0. \quad (8)$$

Similitud con model de red $1 - D$ sugiere $k \leftrightarrow \tau/a$ y

$$L = \frac{1}{2}m\sum_i(\dot{\mu}_i)^2 - \frac{\tau}{2a}\sum_{i=0}^{N}(\mu_{i+1} - \mu_i)^2. \quad (9)$$

Plan



Solución general
Formulación
Modos normales
Solución general
Coordenadas Normales
Matriz modal
Coordenadas normales
Muchos grados de libertad
Problemas de *N* cuerpos
Frecuencias normales
Modos normales
Límite contínuo
Paso al contínuo
Solución en modos normales
Lagrangeano para la cuerda
Coordenadas normales
Mínimia acción en medios contínuos
Hamiltoniano

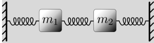
3.2-Frecuencias normales

- Modos normales $\mu_i = C\rho_i \cos(\omega t + \phi) \;\Rightarrow$

  Ec. de mov. $(\frac{2\tau}{a} - m\omega^2)\rho_i - \frac{\tau}{a}(\rho_{i+1} + \rho_{i-1}) = 0,\; i = 1, \cdots, N,$

  con $\rho_\circ = \rho_{N+1} = 0.$
- Introduciendo $\lambda \equiv 2 - \frac{m\omega^2 a}{\tau}$,

$$\lambda\rho_i - (\rho_{i+1} + \rho_{i-1}) = 0.$$



3.2-Frecuencias normales

- El conjunto de ecuaciones lineales $\lambda\rho_i - (\rho_{i+1} + \rho_{i-1}) = 0$ tiene soluciones no triviales solo si su determinante $D_N = 0$. $\Rightarrow$(ver cátedra)

$$D_N = \lambda D_{N-1} - D_{N-2}.$$

- Buscamos soluciones en $D_N = Ae^{iBN}$,

$$\longrightarrow \; D_N = A_+ e^{iN\psi} + A_- e^{-iN\psi}, \;\; \text{con} \;\; \lambda \equiv 2\cos(\psi).$$

Los $A_\pm$ estan dados por D_1 y D_2:

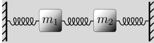
$$D_N = \frac{\sin((N+1)\psi)}{\sin(\psi)} = 0, \quad \Rightarrow \; (N+1)\psi = n\pi, \; n \in \mathbb{N} \Rightarrow \psi \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

- Usando $\lambda = 2 - m\omega^2 a/\tau = 2\cos(\psi)$,

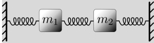
$$\omega^2 = \frac{2\tau}{ma}(1 - \cos(\phi)) = \frac{4\tau}{ma}\sin^2(\frac{\psi}{2}).$$

- De Ec. 10,

$$\omega^2 = \frac{4\tau}{ma}\sin^2(\frac{1}{2}\frac{n\pi}{N+1}), \; n = 1, \cdots, N.$$



Plan



3.3-Modos normales

- Sustitución de las frecuencias normales en la Ec. de mov. Ec. 8 da

$$2\cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right)\rho_i^n = \rho_{i+1}^n + \rho_{i-1}^n.$$

- Las soluciones están dadas por el mismo método que para las raices de $D_N = 0$, pero es interesante un método alternativo: Introducimos $\mu(x_j) = \mu_j$, con $x_j = ja$, y buscamos soluciones de la forma

$$\mu(x_j, t) = \Re(A\exp(i[kx_j - \omega t]), \qquad (11)$$

  o bien con $-k$.

- Sustitución de Ec. 11 en Ec. 8 da

$$\omega^2 = \frac{2\tau}{ma}(1 - \cos(ka)) = \frac{4\tau}{ma}\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right).$$

3.3-Modos normales

Usamos dos tipos de condiciones de borde:

- Condiciones de borde periódicas

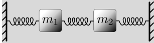
$$\mu(x_i) = \mu(x_{N+i}) = \mu(x_i + Na),$$

y usando Ec. 11, $e^{ikNa} = 1 \;\Leftrightarrow k = 2n\pi/Na$, con

$$\begin{aligned} n &= 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \frac{1}{2}(N-1) \text{ para } N \text{ impar}, \\ n &= 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \frac{1}{2}(N-1), \frac{N}{2} \text{ para } N \text{ par}, \end{aligned}$$

En que usamos la condición de que deben haber exactamente N modos normales.

3.3-Modos normales



- Condiciones de borde con extremos fijos.
  - La solución general del tipo Ec. 11 es

$$\mu(x_j, t) = \Re(A_+ e^i[kx_j - \omega t] + A_- e^i[-kx_j - \omega t],$$

    y las condición $\mu(0) = 0$ da $A_+ = -A_-$.
  - Con $\mu(x_{N+1}) = \mu((N+1)a) = 0$ tenemos

$$\sin(k(N+1)a) = 0 \ \Rightarrow \ k = \frac{n\pi}{a(N+1)}, \ n = 1, \cdots, N.$$

  - Vemos que la expresión para $k(n)$ es equivalente al aplicar la 'relación de dispersión' Ec. 27 a las $\omega(n)$ dadas por el método $D_N = 0$.
  - Con este método alternativo tenemos la expresión para los modos normales:

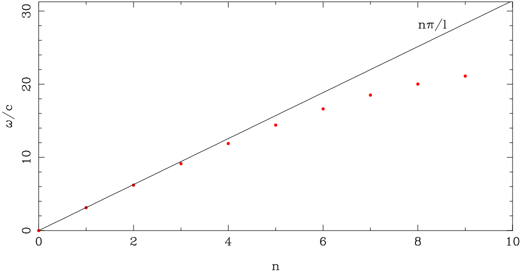
$$\mu(x_j, t) = 2iA_n \sin\left(\frac{n\pi xj}{a(N+1)}\right) \exp(i\omega t),$$

vemos que $\mu(x_j, t) \propto \rho_j^n$ pero sin normalizar, ver aux..

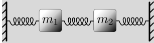
3.3-Modos normales

En resumen, graficamos

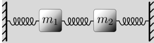
$$\omega_n/c = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{n\pi a}{l2}\right), \text{ con } l \equiv (N+1)a, \text{ donde } c \equiv \sqrt{\tau/(\frac{m}{a})}.$$



Notar la existencia de una frecuencia normal máxima para sistemas discregtos. Cuando $N \gg 1$, $(\omega_n/c)_{\max} \approx 2/a$, con una longitud de onda mínima $\lambda = 2a(N+1)/n > 2a$.

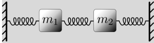


Plan



Solución general
Formulación
Modos normales
Solución general
Coordenadas Normales
Matriz modal
Coordenadas normales
Muchos grados de libertad
Problemas de *N* cuerpos
Frecuencias normales
Modos normales
Límite contínuo
Paso al contínuo
Solución en modos normales
Lagrangeano para la cuerda
Coordenadas normales
Mínimia acción en medios contínuos
Hamiltoniano

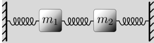
Plan



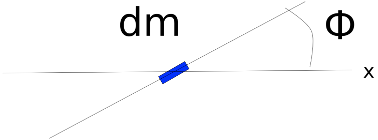
Solución general
Formulación
Modos normales
Solución general
Coordenadas Normales
Matriz modal
Coordenadas normales
Muchos grados de libertad
Problemas de *N* cuerpos
Frecuencias normales
Modos normales
Límite contínuo
Paso al contínuo
Solución en modos normales
Lagrangeano para la cuerda
Coordenadas normales
Mínimia acción en medios contínuos
Hamiltoniano

4.1-Paso al contínuo

- Tomamos el ejemplo de las oscilaciones transversas de una cuerda con masas, y llevamos $N \longrightarrow \infty$, $a \longrightarrow 0$, con $\sigma = m/a$ constante.
- $\Rightarrow$
$$\omega_n \longrightarrow c\frac{n\pi}{l}, \;\; n \in \mathbb{N}.$$
- Soluciones en modos normales ($\sim$ ondas planas) $\mu(x,t) = A\exp(i[kx - wt])$, con $k = (2\pi n)/l, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm\infty$.



Tratamiento directo



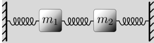
- Ec. de mov. de la cuerda. $\sin(\phi) \sim \phi \sim \tan\phi = \partial u/\partial x$.

$$\text{Newton:} \sigma dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau(x+dx) \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+dx} - \tau(x)\frac{\partial u}{\partial x}$$

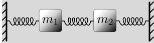
$$\Leftrightarrow \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\tau(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

- Tarea: verificar que se obtiene la misma ecuación desde Ec. 8 pasando al contínuo.
- Si σ y τ son constantes lleguamos a Ec. de ondas 1-D:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \qquad (12)$$



Plan



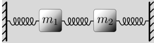
4.2-Solución en modos normales

- Ponemos $u(x,t) = C\rho(x)\cos(wt+\phi)$.
- Sustitución en Ec. de ondas, Ec. 12, da:

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} + k^2\rho = 0, \text{ con}, k = w/c \Rightarrow \rho(x) = A\sin(kx+\theta).$$

- Extremos fijos, $\rho(0) = \rho(l) = 0 \longrightarrow \rho(x) \propto \sin(kx)$, con $k = n\pi/l$, $n \in \mathbb{N}$.
- Para satisfacer condiciones de bordes, **el largo de la cuerda debe ser un multiplo de la longitud de onda media**, i.e. $\lambda = 2l/n$.
- Vemos que el desplazamiento transversal en el caso contínuo es el mismo que en el caso discreto.
- Por analogía con caso discreto, la solución general de la ec. de ondas se construye por superposición de los modos normales,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^n(x)\cos(\omega_n t + \phi_n). \tag{13}$$



4.2-Solución en modos normales

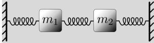
- O bien, en notación de Fourier, Ec. 13 se escribe

$$u(x,t) = \sum_n \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \sin(k_n x)[a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)], \quad (14)$$

  donde, $a_n = C_n \cos(\phi_n)$, $b_n = -C_n \sin(\phi_n)$.
- a_n y b_n se despejan de las condiciones iniciales $u(x, t = 0)$ y $\dot{u}(x, t = 0)$, usando la ortonormalidad de los modos.
- En el caso contínuo, la relación de ortonormalidad, Ec. 7, se escribe

$$\lim_{N\to\infty, a\to 0} \sum_{\mu=1}^{N} a\rho^t(x_\mu) \frac{m}{a} \rho^s(x_m u) = \delta_{st},$$

$$\Rightarrow \int_0^l dx \rho^t(x) \sigma \rho^s(x) = \delta_{st}. \quad (15)$$



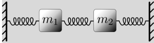
4.2-Solución en modos normales

- Tarea: confirmar Ec. 15 para modos normales contínuos 1D.
- Con la ortonormalidad, podemos despejar los a_n y b_n de Ec. 14 usando las condiciones iniciales:

$$a_n = \int_0^l \rho^n(x) u(x,0) \sigma dx = \sqrt{2} l \sigma \int_0^k \sin(k_n x) u(x,0) \sigma dx,$$

$$\omega_n b_n = \int_0^l \rho^n(x) \dot{u}(x,0) \sigma dx = \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \int_0^l \sin(k_n x) \dot{u}(x,0) \sigma dx.$$

Plan



Solución general
Formulación
Modos normales
Solución general
Coordenadas Normales
Matriz modal
Coordenadas normales
Muchos grados de libertad
Problemas de *N* cuerpos
Frecuencias normales
Modos normales
Límite contínuo
Paso al contínuo
Solución en modos normales
Lagrangeano para la cuerda
Coordenadas normales
Mínimia acción en medios contínuos
Hamiltoniano

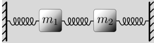
Lagrangeano por límite contínuo

- De Ec. 9,

$$L = \frac{1}{2}\frac{m}{a}\sum_i a(\dot{\mu}_i)^2 - \frac{\tau}{2a}\sum_{i=0}^{N} a(\frac{\mu_{i+1}-\mu_i}{a})^2.$$

- Pasando al límite contínuo, $a \to 0$, $N \to \infty$, $\mu_i(t) = u(x_i, t)$,

$$L = \frac{\sigma}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx - \frac{\tau}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx.$$



Lagrangeano por tratamiento directo

- La energía cinética de un elto de masa *dm* es

$$\frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 ,$$

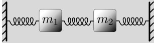
- Para la cuerda entera,

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l dx \sigma \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 .$$

- La energía potencial esta dada por el trabajo que ejercen las fuerzas de tension **internas a *dm*, que tienden a devolverlo a su largo en reposo *dx*:**

$$\begin{aligned} dW &= -\tau(ds - dx) = -\tau dx \left[\left\{ 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\}^{1/2} - 1 \right] \\ &\approx \frac{\tau}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 dx = -dU. \longrightarrow V = \frac{\tau}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \end{aligned}$$

Plan



Solución general
Formulación
Modos normales
Solución general
Coordenadas Normales
Matriz modal
Coordenadas normales
Muchos grados de libertad
Problemas de *N* cuerpos
Frecuencias normales
Modos normales
Límite contínuo
Paso al contínuo
Solución en modos normales
Lagrangeano para la cuerda
Coordenadas normales
Mínimia acción en medios contínuos
Hamiltoniano

4.4-Coordenadas normales

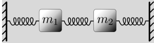
- Solución general cuerda con extremos fijos:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(x) C_n \cos(\omega_n t + \phi_n), \qquad (16)$$

$$\text{con } \rho_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \text{ y } \int_0^l dx\, \rho_n(x) \sigma \rho_m(x) = \delta_{mn}$$

- Del parecido con $\mu_i(t) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i^n \zeta_n$, definimos

$$\zeta_n(t) = C_n \cos(\omega_n t + \phi_n),\ n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(x) \zeta_n(t).$$



4.4-Coordenadas normales

- Integrando por partes $V = \frac{\tau}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$, y usando ec. de ondas en Eq. 16 para $\partial^2 u_n(x)/\partial x^2$:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{\tau}{2}\int_0^l \left[\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(x) C_n \cos(\omega_n t + \phi_n)\right] \\ &\quad \left[\sum_{m=1}^{\infty} \rho_m(x) C_m k_m^2 \cos(\omega_m t + \phi_m)\right], \end{aligned} \quad (17)$$

  y usando la ortonormalidad de los modos,

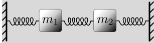
$$V(x) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} \omega_m \zeta_m^2.$$

- Para la energía cinética, $T = \frac{1}{2}\int dx \sigma (\partial u/\partial t)^2$, tenemos

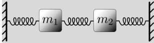
$$T = \frac{1}{2}\sum_m (\dot{\zeta}_m)^2.$$

- Desacoplamos el Lagrangeano:

$$L = \sum_{m=1}^{\infty} (\dot{\zeta}_m - \omega_m^2 \zeta_m^2), \text{con ec. de mov } \ddot{\zeta}_n = -\omega_n^2 \zeta_n.$$



Plan



4.5-Mínimia acción en medios contínuos

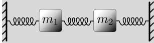
- Introducimos la densidad Lagrangeana $\mathcal{L}(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}; x, t)$:

$$\delta S = 0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t1}^{t2} dt \int_0^l dx \mathcal{L}(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}; x, t) = 0.$$

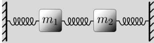
- Considerando una variación δu con $\delta u(x = 0, t) = \delta u(x = l, t) = \delta u(x, t_1) = \delta u(x, t_2) = 0$, i.e. con condiciones de bordes fijas, lleguamos a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial t)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial x)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0.$$

- Con $L = \int_0^l dx \underbrace{(\frac{\sigma}{2}) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}_{\mathcal{L}}$, recuperamos ec. de ondas 1D.



Plan



4.6-Hamiltoniano

- $H = T + V$ ya que $\mathcal{L}$ no depende de t, ni tampoco la relación entre (x, y) y las coord. gen. u_i.
- $\Rightarrow \; H = T + V = \frac{1}{2}\sigma \int_0^l dx \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\tau \int_0^l dx \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$.
- $\Rightarrow \; H = E = \frac{1}{2}\sum_n ((\dot{\zeta}_n)^2 + \omega_n^2(\zeta_n)^2)$, y usando $\zeta_n = C_n \cos(\omega_n t + \phi_n)$,

$$H = E = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 C_n^2.$$