

Parte III

Ondas

Índice

III	1
1. Soluciones de d’Alembert y de Bernouilli	1
1.1. Solución de d’Alembert	1
1.2. Decomposición espectral	2
1.3. d’Alembert para extremos fijos	2
1.4. Ondas 3-D	3
2. Flujo de energía	4
2.1. Vector flujo de energía	4
2.2. Transmisión, reflexión	5
3. Paquetes de ondas	6
3.1. Medios dispersivos	6
3.2. Paquetes de ondas	7
4. Fenómenos ondulatorios	8
4.1. Sonido	8
4.2. Ondas de superficie	10
4.3. Ondas electromagnéticas y ondículas	12
5. Difracción e interferencias	15

1. Soluciones de d’Alembert y de Bernouilli

1.1. Solución de d’Alembert

- Por sustitución, las soluciones de la ec. de ondas 1D se pueden escribir

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct). \tag{1}$$

- Las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ \dot{u}(x, 0) &= g(x). \end{aligned}$$

- La solución Ec. 1 se pueden adecuar a cualquier condición inicial f y g con

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x - ct) + f(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(x') dx'. \quad (2)$$

- Notar caso $g = 0$: ec. de ondas da dos señales propagándose en sentido opuesto con mitad de amplitud original.

.3

1.2. Decomposición espectral

- Consideremos una onda $f(x - ct)$ propagándose hacia $+x$.
- En S' , con velocidad c respecto a S , hacemos descomposición de Fourier:

$$f(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} dk A(k) \exp(ikx').$$

- Entonces en S tenemos la descomposición espectral

$$f(x, t) = \int dk A(k) \underbrace{\exp(i[kx - \omega t])}_{\text{onda plana monocromática}}.$$

- Longitud de onda $\lambda = 2\pi/\omega$, período $\tau = 2\pi/\omega$.

.4

1.3. d'Alembert para extremos fijos

- Condiciones iniciales: $u(x, 0) = f(x)$, $\dot{u}(x, 0) = g(x)$, con extremos fijos $u(0, t) = u(l, t) = 0$.
- Cuerda: $0 \leq x \leq l \Rightarrow$ necesitamos extender el dominio de f y $g(x \pm ct)$ para todo \mathbb{R} porque $t \rightarrow \infty$.
- Requerimos $f(-x) = -f(x)$ y $g(-x) = -g(x)$ de manera que $f(0) = g(0) = 0$. Notar ondas viajando en sentido opuesto hacia 0.
- También requerimos f y g impares en torno a $x = l$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(l + (x - l)) = -f(l - (x - l)) = f(x - 2l) \\ g(x) &= g(l + (x - l)) = -g(l - (x - l)) = g(x - 2l) \end{aligned}$$

- $\Rightarrow f$ y g deben ser impares y periódicas.

.5

- Bernouilli \equiv modos normales, $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^n(x) \cos(\omega_n t + \phi_n)$, o bien

$$u(x, t) = \sum_n \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \right],$$

donde, $a_n = C_n \cos(\phi_n)$, $b_n = -C_n \sin(\phi_n)$.

- Expandimos d'Alembert para extremos fijos, y usamos $\int_0^l \rho_n(x) \rho_m(x) \sigma dx = \delta_{nm}$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

con $A_n = \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x'}{l}\right) f(x') \sigma dx'$ (3)

.6

- De la misma manera para g ,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

con $B_n = \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x'}{l}\right) g(x') \sigma dx'$ (4)

- Vemos que las expansiones de f y g en modos normales (i.e. serie de Fourier) son impares y periódicas con período $2l$.
- Sustituyendo f y g en la solución de d'Alembert, recuperamos

$$u(x, t) = \sum_n \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \right],$$

con $a_n \equiv A_n$ y $B_n = n\pi c b_n / l$.

.7

1.4. Ondas 3-D

- En 3-D,

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0.$$

- d'Alembert: $\psi = \psi(\vec{x} \cdot \hat{c} \pm ct) \Rightarrow$ Onda plana.

- Decomposición espectral:

$$\psi(\vec{r}, t) = \int d^3k A(\vec{k}) \exp [i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)].$$

- Ondas esféricas: busquemos soluciones $\psi(\vec{r}, t) = f(r, t)$. En coordenadas esféricas,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Solución: $f = h(r \pm ct)/r$.

.8

2. Flujo de energía

2.1. Vector flujo de energía

Densidad Hamiltoniana y momentum canónico

- Del ppio de mínima acción,

$$\delta S = 0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx \mathcal{L}(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}; x, t) = 0,$$

Ileguamos a las ecuaciones de Euler-Lagrange para medios continuos (i.e. la ecuación de ondas),

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial t)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial x)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0. \quad (5)$$

- La densidad Hamiltoniana es

$$\mathcal{H} = \mathcal{P} \frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{L}, \text{ con } \mathcal{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial t}}, \quad (6)$$

donde \mathcal{P} es el momentum canónico.

.9

Vector flujo de energía

- Usando Ec. 5 calculamos la variación de la densidad de energía (\equiv densidad Hamiltoniana si $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$),

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} \frac{\partial u}{\partial t} \right],$$

cuando $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$, es decir cuando T y V no dependen explícitamente de t .

- En 3-D, llegaríamos a

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0, \quad (7)$$

donde $S_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial x_i}} \frac{\partial u}{\partial t}$ es el vector flujo de energía.

- Integrando en un volumen V , vemos que Ec. 7 constituye una ecuación de continuidad para la energía asociada a una onda.

.10

Ejemplo: cuerda

- Para la cuerda,

$$\mathcal{L} = \frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \text{ y}$$

$$\mathcal{H} = \frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2.$$

- De Eqs. 6 y 7 tenemos

$$\mathcal{P} = \sigma(x) \frac{\partial u}{\partial x}, \text{ y}$$

$$\vec{S} = -\tau(x) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \hat{x}.$$

.11

Ejemplo: onda monocromática en una cuerda

- Calculemos el flujo de energía asociado a una onda monocromática, $u(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$:

$$S = A^2(\tau k^2 c) \sin^2(kx - \omega t), \text{ y en promedio temporal,}$$

$$\langle S \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T S dt = \frac{1}{2} A^2(\tau k^2 c) = \frac{1}{2} A^2 \sigma c \omega^2.$$

- Además tenemos la densidad de energía

$$\mathcal{H} = A^2 \tau k^2 \sin^2(kx - \omega t).$$

- Vemos entonces que para una onda monocromática

$$\boxed{S = \mathcal{H}c}.$$

.12

2.2. Transmisión, reflexión

- Cuando una onda $u_i(\vec{x}, t)$ incide en una discontinuidad del medio en el cual se propaga, existe una onda reflejada $u_r(\vec{x}, t)$, y una onda transmitida, $u_t(\vec{x}, t)$.
- El coeficiente de transmisión se define

$$T = \frac{S_t}{S_i},$$

y el coeficiente de reflexión es

$$R = \frac{S_r}{S_i}.$$

- Para el ejemplo de una onda en una cuerda incidente en una discontinuidad de $\sigma(x)$ (tarea),

$$R = \left[\frac{\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}} \right]^2 \text{ y } T = \frac{4\sqrt{\sigma_1\sigma_2}}{[\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}]^2}$$

.13

3. Paquetes de ondas

3.1. Medios dispersivos

Naturaleza discreta (cuántica) de la materia

- Cuando λ es comparable con la distancia a entre las partículas discretas que componen un medio continuo de dimensión $L \gg a$, la aproximación de continuo falla y hay que recurrir a una descripción discreta.
- Por ejemplo para la cuerda con masas, cuando $\lambda \sim a$, en que a es la distancia entre las masas, teníamos

$$\omega^2 = \frac{4\tau}{ma} \sin^2(ka/2),$$

y cuando $\lambda \gg a$ recuperamos $\omega^2 \rightarrow \frac{\tau}{\sigma} k^2$.

- Definimos la velocidad de fase $c_f \equiv \omega/k$. Para una cuerda ideal, en el límite continuo la velocidad de propagación $c_f = c$ es constante, independiente de ω .
- Pero cuando $k \rightarrow \infty$,

$$c_f = \sqrt{\frac{4\tau}{mak^2} \sin^2(ka/2)},$$

y vemos que ondas con mayor k se propagan más lento.

.14

Roce

- Consideremos una cuerda en un medio viscoso, de manera que exista una fuerza de roce opuesta al desplazamiento transversal.
- A 1er orden en la fuerza de roce, incluimos la fuerza de roce aplicada a un elto de cuerda dx :

$$f_r = -dx\chi \frac{\partial u}{\partial t}.$$

- Un balance de fuerzas sobre un elemento dx da una ecuación de ondas modificada,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\chi}{\tau} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \text{ con } c = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}.$$

.15

- Consideremos la propagación de una onda monocromática en un medio con roce. Ponemos $u(x, t) = A \exp[i(kx - \omega t)]$, y vemos que la relación de dispersión

$$\frac{\omega^2}{c^2} + i \frac{\chi \omega}{\tau} - k^2 = 0 \text{ es compleja.}$$

- $\Rightarrow k \in \mathbb{C}, k = k_R + ik_I$.

- De la relación de dispersión,

$$k_{\pm}^I = -\chi\omega / (2\tau k_{\pm}^R),$$

$$k_{\pm}^R = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2}{c^2} \pm \sqrt{\frac{\omega^4}{c^4} + \left(\frac{\chi\omega}{c}\right)^2} \right).$$

- Entonces las soluciones de la ecuación de ondas disipativa tienen la forma

$$u = Ae^{-k^I x} e^{i(k^R x - \omega t)}.$$

- Si el medio disipativo está confinado en $x > 0$, es necesario que $k^I > 0$ para evitar divergencia.

.16

3.2. Paquetes de ondas

- La decomposición espectral de una señal es

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp[i(kx - \omega t)] dk,$$

en que $A(k)$ es el ‘espectro’ de u , y también es la transformada de Fourier en $t = 0$.

- Queremos estudiar la propagación de la onda en un medio dispersivo, para $t > 0$.
- Si partimos con un espectro $A(k)$ muy angosto en torno a k_0 ,

$$\omega(k) = \omega_0 + (k - k_0) \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0}.$$

- Introduciendo $l \equiv k - k_0$,

$$u(x, t) = \exp[i(k_0 x - \omega_0 t)] \overbrace{\int dl A(l + k_0) \exp[il(x - v_g t)]}^{\text{envoltura se propaga con velocidad } v_g},$$

con $v_g \equiv \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0}$.

.17

- Entonces vemos que, modulo un factor armónico (exponencial oscilante),

$$u(x, t) \sim f(x - v_g t),$$

y la señal se propaga con velocidad v_g . Notamos que las ondas monocromáticas, i.e. una sola componente espectral, no pueden transmitir información porque tienen dominio infinito.

- Para el caso de un espectro Gaussiano en $t = 0$,

$$A(k) = \exp(-\alpha^2(k - k_0)^2),$$

$$\Rightarrow \text{(tarea)} u(x, t = 0) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} e^{ik_0 x} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}},$$

y $\sigma(u)\sigma(A) = 1$, donde σ es la dispersión cuadrática media.

.18

4. Fenómenos ondulatorios

- Sonido.
- Ondas de superficie.
- Ondas electromagnéticas.
- Ondas de materia - ondículas.

.19

4.1. Sonido

- Sonido: señal de presión en oído, $P_e(t)$, tal que $P = P_o + P_e$, y con intensidad medida en dB,

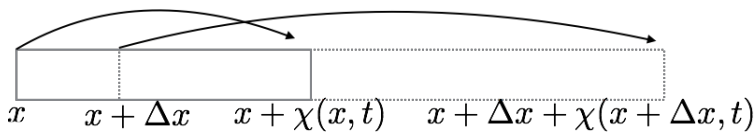
$$\frac{I}{\text{dB}} = 20 \log(P_e/P_{\text{ref}}), \text{ con } P_{\text{ref}} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ N m}^{-2}.$$

- Umbral de audibilidad: $I = 0 \text{ dB}$. Umbral del dolor: $I = 130 \text{ dB}$. Conversación: $I = 40 \text{ dB}$. Turbina de avión, martillo neumático: $I = 120 \text{ dB}$.
- Vemos que $P_e \ll P_o \sim 10^5 \text{ N m}^{-2} = 1 \text{ bar}$.
- Existe una ecuación de estado que liga $P = f(n, T)$, por ejemplo $P = nkT$. Con suposiciones adicionales sobre T , que particularizan el proceso termodinámico, se puede escribir una relación 1 a 1 $P = f(n)$.
- $\Rightarrow P_o + P_e = f(n_o + n_e) = f(n_o) + n_e f'(n_o)$.
- \Rightarrow

$$P_e = \kappa n_e, \tag{8}$$

$$\text{con } \kappa = f'(n_o) = \left. \frac{\partial P}{\partial n} \right|_{n=n_o}.$$

.20



- En una onda de sonido, la variación de presión $P(t)$ induce un desplazamiento lineal $\chi(x, t)$, tal que aire en la posición x oscila en torno a x con un desplazamiento χ .
- La masa de aire en un volumen elemental $\Delta V = A\Delta x$ es conservada:

$$n_o \Delta x = n(x, t)(x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t) - x - \chi(x, t)).$$

- Para $\Delta x \rightarrow 0$, $n_o = (n_o + n_e) \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} + 1 \right)$,
- Y con $n_e \ll n_o$, tenemos una relación entre n_e y χ :

$$n_e \approx -n_o \frac{\partial \chi}{\partial x}. \tag{9}$$

.21

- La segunda ley de Newton aplicada a un elemento de volumen es:

$$mn_c A \Delta x \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = [P(x, t) - P(x + \Delta x, t)] A \approx -\frac{\partial P_e}{\partial x} \Delta x A.$$

- Con la relación entre P_e y n_e , Ec. 8, y con Ec. 9,

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \frac{\kappa}{m_e} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$$

- $\chi(x, t)$ satisface la Ec. de ondas, con $c_s = \sqrt{\kappa/m} = \sqrt{\partial P/\partial \rho}$.
- Además de Ec. 9, vemos que n_e y P_e (de Ec. 8), también cumplen ec. de ondas.

.22

- Newton: Sonido isothermal con T constante \Rightarrow difusión aplana las perturbaciones de densidad. A pesar de la imposibilidad del sonido isothermal, pongamos $P = nkT \Rightarrow$

$$c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{kT}{m}.$$

- En el caso isothermal, $c_s \approx 290 \text{ m s}^{-1}$, lo cual es cercano pero inferior al observado $\approx 330 \text{ m s}^{-1}$.

.23

- Laplace: longitud de onda sonido es \gg libre camino medio, $\lambda_s \approx 1 \text{ m} \gg l = 1/(n\sigma) \approx 10^{-7} \text{ m}$.
- Perturbaciones adiabáticas, sin difusión $\Rightarrow PV^\gamma = \text{Cte} \Leftrightarrow P = \left(\frac{mN}{V}\right)^\gamma = \text{Cte}$,
- $\Rightarrow P = \text{Cte} \rho^\gamma$, y

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{\gamma P}{\rho} = c_s^2.$$

- Usando $PV = NkT$,

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma kT}{m}}. \quad (10)$$

- Del teorema de equipartición, vemos que $c_s \approx \sqrt{\langle v^2 \rangle}$.
- Para un gas ideal monoatómico, $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5/2}{3/2}$, mientras que para un gas ideal diatómico $\gamma \approx 7/5$.
- El factor $\sqrt{\gamma}$ lleva a acuerdo con las observaciones.

.24

- Efecto Doppler.
- Modos normales de la zampoña.

.25

4.2. Ondas de superficie

- Sea $\zeta(x, t)$ el desplazamiento del equilibrio de la superficie de agua en un estanque con profundidad h . Estudiaremos el caso $h \ll \lambda$.
- Consideremos el desplazamiento vertical de un volumen $\delta\mathcal{V}$:

$$\rho\delta\mathcal{V}\frac{d^2z}{dt^2} = f_z + \delta AP(z) - \delta AP(z + dz), \text{ con } \delta\mathcal{V} = \delta A\delta z.$$

$$\Rightarrow \rho\frac{dv_z}{dt} = f_z - \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (11)$$

o en general,

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \vec{\nabla}P. \quad (12)$$

- Hipótesis por verificar y cuantificar: $\frac{dv_z}{dt} \sim 0$.

$$\Rightarrow -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = 0, \text{ y}$$

$$P(x, z) = P_0 + \rho g(\zeta(x, t) - z). \quad (13)$$

.26

- Notemos ahora que a primer orden en v_z , $\frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t}$:

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{dz}{dt}}_{O(v_z^2)}.$$

- Del equivalente a Ec. 12 en x :

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}. \quad (14)$$

- Usando Ec. 13,

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (15)$$

.27

- Para fijar ideas, consideremos un canal con ancho b según \hat{y} .
- Conservación de masa en el volumen $d\mathcal{V} = hb\delta x$, con borde $\delta\mathcal{S}$:

$$\underbrace{\int_{\delta\mathcal{S}} -\rho\vec{v} \cdot d\vec{A}}_{-\rho[(h+\zeta)bv_x]|_{x+\delta x} + \rho[(h+\zeta)bv_x]|_x} = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{d\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}}_{\frac{\partial}{\partial t}(\rho[h+\zeta]b\delta x)}$$

$$\Rightarrow -\rho hb\delta x \frac{\partial v_x}{\partial x} = \rho b\delta x \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

- Tenemos entonces, de la conservación de masa,

$$-h\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (16)$$

.28

- Combinando Ec. 15 (Euler), y Ec. 16 (continuidad), llegamos una ecuación de ondas en $\zeta(x, t)$:

$$gh \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \implies c = \sqrt{gh}.$$

- Tenemos el resultado interesante que la señales se propagan más rápido a mayor profundidad h .
- \implies en una evolución no lineal, como en una ola, la cresta de la ola se propaga mas rápido, y se quiebra la ola.

.29

- Verifiquemos ahora la hipótesis $\frac{dv_z}{dt} \sim 0$ cuando $h \ll \lambda$.
- Busquemos soluciones en modos normales en un estanque de largo l , y con $v_x = 0$ en los bordes.
- Usando Ec. 15, $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$ en los bordes.
- Los modos son

$$\zeta^n(x, t) = u_n(x) \cos(\omega_n t + \phi_n),$$

$$\text{con } u_n(x) = \frac{2}{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty.$$

.30

- De Ec. 15, la velocidad es

$$v_x^n(x, t) = \frac{c}{h} \sin(k_n x) \sin(k_n c t + \phi_n).$$

- Con $v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ en la superficie, donde v_z es máxima ($v_z = 0$ en el fondo), podemos estimar

$$\frac{1}{g} \frac{dv_z}{dt} \approx \frac{1}{g} \frac{\partial v_z}{\partial t} \approx \frac{k_n^2 c^2 \zeta_n}{g},$$

con $\zeta_n \ll h$, y $c^2 = gh$,

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v_z}{\partial t} \ll \left(\frac{2\pi h}{\lambda_n}\right)^2,$$

entonces vemos que $\frac{\partial v_z}{\partial t}$ es despreciable (ante g) si $h \ll \lambda$.

.31

- A.N.: $c = \sqrt{gh} \sim 0,2 \text{ km s}^{-1} = 800 \text{ km/h}$ para $h = 5 \text{ km}$. Esta es la velocidad de propagación para tsunamis con $\lambda \gg 5 \text{ km}$.

.32

4.3. Ondas electromagnéticas y ondículas

4.4.3- Ondas electromagnéticas

- Ecuaciones de Maxwell \Rightarrow campos (\vec{E}, \vec{B}) satisfacen ecuación de ondas:

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon\epsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

$\Rightarrow c = c_0/n$, donde c_0 es la velocidad de la luz en el vacío, y n es el *índice de refracción*.

- Analogía con ondas mecánicas sugiere que señal (\vec{E}, \vec{B}) se propaga en un medio, el “ether”.

.33

- La densidad de energía asociada a señal (\vec{E}, \vec{B}) es

$$u = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B},$$

$$\text{con } \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H} \text{ y } \vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}.$$

- Conservación de energía (ec. de continuidad):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j}_l \cdot \vec{E}, \text{ con } \boxed{\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}} \text{ vector de Poynting.} \quad (17)$$

.34

Relación entre \vec{E} y \vec{B} en ondas planas

$$\vec{E} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x-ct) + g(x+ct) \\ F(x-ct) + G(x+ct) \end{pmatrix} \Rightarrow c\vec{B} \begin{pmatrix} 0 \\ -F(x-ct) + G(x+ct) \\ f(x-ct) + g(x+ct) \end{pmatrix}.$$
$$\Rightarrow \vec{E} \perp \vec{B} \perp \hat{k}$$

.35

u y vector de Poynting para una onda plana electromagnética

$$\vec{S} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H}, \text{ y } u = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 |\vec{B}|^2$$

$$\rightarrow u = \epsilon_0 E^2 \text{ y } \vec{S} = uc\hat{k}$$

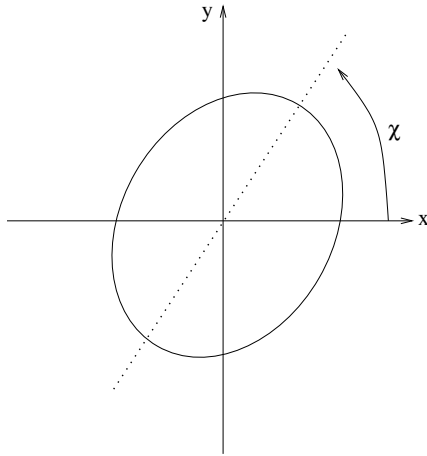
.36

Polarización

Para una “Onda Plana Monocromática” (OPM),

$$\text{Re} [\vec{E}_k] = \text{Re} [\hat{x}\epsilon_x e^{i\phi_x} \exp(i(kx - \omega t)) + \hat{y}\epsilon_y e^{i\phi_y} \exp(i(kx - \omega t))]$$

- Polarización lineal: $\phi_y - \phi_x = 0$.
- Polarización circular: $|\phi_y - \phi_x| = \frac{\pi}{2}$ y $\epsilon_y = \epsilon_x$.
- El caso general es elíptico, con $\tan(\chi) = \frac{\epsilon_x \cos(\phi_x)}{\epsilon_y \cos(\phi_y)}$.



.37

Radiación electromagnética

- Potencial vector $B \equiv \vec{\nabla} \otimes \vec{A}$.
- Aproximación dipolar: lejos de una distribución de cargas con densidad de corriente $\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)\vec{v}(\vec{r}, t)$,

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r_1} \int d^3r_2 \vec{j}(\vec{r}_2, t - r_1/c) = \frac{\mu_0}{4\pi r_1} \sum_a q_a \vec{v}_a(t - r_1/c).$$

- Introduciendo el dipolo eléctrico $\vec{d} = \sum_a q_a \vec{v}_a$,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r_1} \text{vec} d(t - r_1/c) \sim \underbrace{\frac{\vec{\psi}(t - r_1/c)}{r_1}}_{\text{onda esférica}}.$$

.38

Radiación dipolar

- Cálculo de \vec{E}, \vec{B} :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \otimes \vec{A}, \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \text{ Gauge de Lorentz.} \end{aligned}$$

■ ... \implies :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi cr} \ddot{\vec{d}} \otimes \hat{r},$$

$$\vec{E} = c\vec{B} \otimes \hat{r} - \vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

.39

Fórmula de Larmor para radiación dipolar

■ Cálculo de \vec{S} :

$$\vec{S} = \epsilon_0 c \left(\frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{\vec{d}} \right)^2 \sin^2(\theta) \hat{r},$$

donde θ es el ángulo entre \hat{r} y \vec{d} .

■ Integrando la potencia emitida en todas direcciones,

$$P = \int_{4\pi} \vec{S} \cdot \hat{r} r^2 d\Omega = \frac{\mu_0}{6\pi c} (\ddot{\vec{d}})^2,$$

Fórmula de Larmor.

■ Notar caso de una antena, con $d = LQ$, y $I = \dot{Q} = \text{Re}[I_0 e^{i\omega t}]$.

.40

4.4.3- Ondículas

- Experimento de Michelson en ~ 1900 demuestra inexistencia del “ether”.
- Cuantización de la energía electromagnética (cuerpo negro, Planck 1900) + efecto fotoeléctrico (Einstein 1905) \implies señal (\vec{E}, \vec{B}) es transportada por partículas sin masa, llamadas ‘fotones’:

$$\text{energía } E = h\nu.$$

$$\text{momentum } p = h/\lambda.$$

- Con partículas el *Ether* como medio de propagación ya no es necesario, señal (\vec{E}, \vec{B}) es una onda en la densidad de energía \implies densidad de fotones.

.41

- Electrones se comportan a veces como ondas (son difractados por obstáculos, demostrado experimentalmente en 1927), a veces como partículas (carga elemental de Millikan, 1910).
- Louis de Broglie propone extender concepto de ‘ondículas’ a materia: asociamos una longitud de onda al momentum, con $p = h/\lambda = \hbar k$, y energía cinética + potencial $E = h\nu = \hbar\omega$.
- Continuidad de la ‘función de onda’ \implies circunferencias en órbitas electrónicas deben ser múltiplos de $\lambda \implies$ Explicación de los postulados de Bohr.
- Schrödinger y la mecánica ondulatoria: la amplitud de la función de onda electrónica $\psi(\vec{r}, t)$ (o para cualquier partícula) da la densidad de carga:

$$\rho = \psi\psi^*.$$

.42

- Para una partícula con masa, no relativista ($v \ll c$, la energía total (o sea cinética + potencial) es $E = \frac{p^2}{2m} + V$.
- Notamos que para una OPM $\psi(\vec{r}, t) \propto \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega \psi = -i \frac{E}{\hbar} \psi, \text{ y}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2 \psi = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi.$$

- Escribiendo $\frac{p^2}{2m} \psi + V\psi = E\psi$, llegamos a la ecuación de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

.43

5. Difracción e interferencias

- En general la potencia que lleva una onda plana que viaja con velocidad c , esta dada por el vector flujo de energía (Poynting), $S \propto uc$, donde u es la densidad de energía, $u \propto |\psi|^2$.

.44