I Sistemas disipativos.

1. `(2.0 pt)` Marco formal.
En sistema sometidos a pérdidas de energía por roce, es usual aproximar la fuerza disipativa por

$$\vec{F}^d = -\vec{k} \cdot \vec{v}\hat{v}.$$

Queremos introducir estas fuerzas en el formalismo de la mecánica analítica.

   a) Dé una expresión para la función de Rayleigh R, tal que $F_i^d = -\partial R/\partial \dot{x}_i$, donde x_i es un grado de libertad en coordenadas cartesianas.

   b) Demuestre que la ecuación de movimiento,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} = 0,$$

   se escribe de igual forma en coordendas generalizadas $q_\sigma(\{x_i\}_{i=1}^n)$ (ayuda: demnuestre que $\partial x_i/\partial q_\sigma = \partial \dot{x}_i/\partial \dot{q}_\sigma$.

2. `(4.0 pt)` Ejemplo.
Consideramos un aro de radio r, con momento de inercia $I = Mr^2$, que rueda sin resbalar por una pendiente ϕ bajo la acción de la gravedad (ver figura).

   a) Si el ángulo de rotación del aro es θ y la distancia recorrida a lo largo de la pendiente es x, escriba la constricción de rotación sin resbalar entre $d\theta$ y dx.

   b) Escriba el Lagrangeano del sistema, tomando en cuenta la energía cinética de translación del aro según $\dot{x}$ y la de rotación, en $\dot{\theta}$ (recuerde incluir la energía potencial de gravedad).

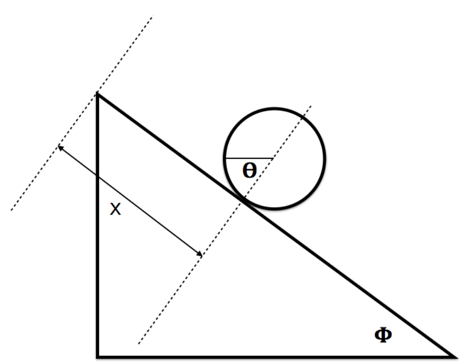
   c) Como en este caso tenemos una constricción no-holonómica, la expresión general para la ecuación de movimiento incluyendo los multiplicadores de Lagrange sería

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} + \sum_\sigma \frac{\partial f}{\partial q_\sigma} = 0, \text{ para cada grado de libertad } q_\sigma.$$

   donde f sería la constricción si se pudiese integrar la relación entre r y θ. O sea $df = \sum_\sigma(\partial f/\partial q_\sigma)dq_\sigma = 0$. Escriba las ecuaciones de movimiento en x y en θ, incluyendo la técnica de multiplicadores de Lagrange.

   d) Identifique la fuerza de roce, y compare la aceleración con el caso sin fricción.

   e) Dé una expresión para la función de Rayleigh en este caso.



II Pequeñas oscilaciones - teoría.

Sean $V\left(\{q_i\}_{i=1}^{n}\right)$ y $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m\dot{x_i}^2$ las energías potencial y cinética que describen un sistema de N partículas con n grados de libertad, coordenadas cartesianas $x_j\left(\{q_i\}_{i=1}^{n}\right)$, $j = 1, \ldots, 3N$, y coordenadas generalizadas $q_j\left(\{x_i\}_{i=1}^{3N}\right)$, $j = 1, \ldots, n \leq N$. Elijimos un sistema de coordendas generalizadas tal que $\{q_i\}_{i=1}^{n} = 0$ en equilibrio.

1. (1.0 pt) Demuestre que en torno a los puntos de equlibrio T y V son formas cuadráticas,

$$V \approx \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} v_{jk} q_j q_k \tag{1}$$

$$T \approx \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \tag{2}$$

   donde las matrices $\tilde{v}$ y $\tilde{m}$ son constantes y simétricas ($v_{jk} = v_{kj}$, $m_{jk} = m_{kj}$).

2. (1.0 pt) Usando las ecuaciones de Lagrange, muestre que las ecuaciones de movimiento tienen la forma

$$\sum_{k=1}^{n} \left(v_{lk} q_k + m_{lk} \ddot{q}_k\right) = 0, \qquad \forall\, l = 1, \ldots, n \tag{3}$$

3. (1.0 pt) ¿ A qué corresponden los “modos normales” del sistema? ¿Cuántos hay?

4. (1.0 pt) Suponga soluciones en modos normales y muestre que la ecuación para las frecuencias características está dada por

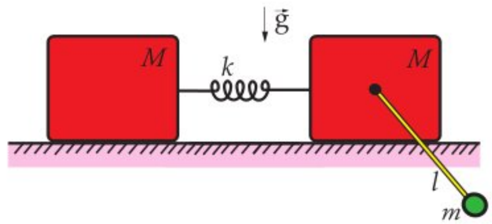
$$\det(\tilde{v} - \omega^2 \tilde{m}) = 0. \tag{4}$$

5. (1.0 pt) Desmuestre que, para dos frecuencias características distintas ω^s y ω^t, los modos normales correspondientes $\rho_k^{s,t}$ satisfacen una relación de ortonormalidad:

$$\sum_{j,k} \rho_j^s m_{jk} \rho_k^t = \delta_{st}. \tag{5}$$

6. (1.0+ pt) ¿ Qué ocurre en el caso degenerado, $\omega^s = \omega^t$? Muestre que en el caso degenerado se pierde información sobre los modos normales, en el sentido que no cumplen automáticamente Ec. 5. ¿ Cómo contruiría en el caso degenerado un conjunto de modos normales ortonormales según Ec. 5?

III Pequeñas oscilaciones - aplicación.



Considere un sistema compuesto por dos bloques de masa M , conectados entre si por un resorte de constante elástica k, que deslizan sobre una superficie horizontal sin roce. Sobre uno de los bloques cuelga, desde su centro, un péndulo de largo l y masa m, como se ilustra en la Figura.

a) `( 2 pt)` Encuentre el lagrangeano de pequeñas oscilaciones.

b) `( 2 pt)` Calcule las frecuencias propias del sistema si $g/l = k/M = \omega_\circ$.

c) `( 2 pt)` Obtenga los modos normales de oscilación, y descríbalos cualitativamente.