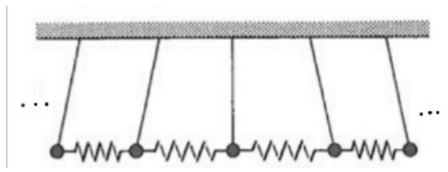
I N péndulos acoplados.

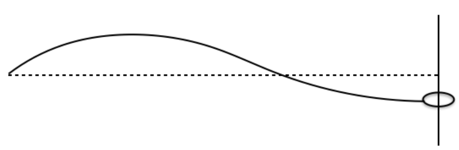
Considere una cadena de N péndulos de masa m y cuerda de largo l conectados por resortes separados una distancia a como lo muestra la Figura.



1. (2 pt) Construya el lagrangiano de pequeñas oscilaciones para la coordenada generalizada θ_i, con θ_i definido como el desplazamiento de cada pendulo con respecto a la vertical.
2. (2 pt)Una vez obtenido el Lagrangiano de pequeñas oscilaciones (con $\theta_i \ll 1$), considere $N \to \infty$ y $a \to 0$. Además extienda $i \to x$; $m/a \to \rho$ y $ka \to Y$. Escriba el Lagrangiano en el límite continuo.
3. (2 pt) A partir de la densidad lagrangiana obtenida en (2), use la ecuaciones de Euler-Lagrange en el continuo para encontrar la ecuación de movimiento. La ecuación que deberá obtener es la Ecuación de Klein-Gordon unidimensional.

II Cuerda con extremo libre.

Considere una cuerda de largo l con un extremo fijo en $x = 0$. El otro extremo en $x = l$ esta sujeto a una argolla de masa $m = 0$ y tamaño despreciable, que esta restringida a desplazarse sin fricción por un eje perpendicular a $\hat{x}$ (o sea solo según $\hat{y}$).



1. (1 pt) Deduzca la ecuación de movimiento para el desplazamiento transversal de la cuerda según $\hat{y}$ (debiera llegar a la ecuación de ondas).
2. (2 pt) Imponga condiciones de bordes si $m = 0$.
3. (2 pt) Calcule las frecuencias y los modos normales del sistema si $m = 0$.
4. (1 pt) Como cambian estos resultados si m es finito?

III Energía en la cuerda con extremos fijos.

Consideramos una cuerda con extremos fijos, tensión τ, densidad lineal de masa σ, y largo $3l$. La cuerda es pulsada en $x = l$ donde es apartada de la posición de equilibrio una distancia $h \ll l$, de forma que la condición incial del sistema es un desplazamiento con forma triangular, sin velocidad.

1. (`2 pt`) Busque soluciones en modos normales: calcule las frecuencias normales ω_n, obtenga los número de ondas k_n, y dadas las condición iniciales identifique los coeficientes a_n y b_n en

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_n \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \sin(k_n x) \\ &\quad [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)]. \end{aligned}$$

2. (`1 pt`) Calcule la energía almacenada en la cuerda en $t = 0$ (ayuda: calcule el trabajo ejercido por la tensión constante al estirar la cuerda desde la posición de equilibrio a la condición incial triangular).
3. (`1 pt`) Escriba una expresión general para la energía en la cuerda en todo t.
4. (`1 pt`) Calcule la energía almacenada en cada modo normal n.
5. (`1 pt`) Demuestre que la suma total de la energía en cada modo es igual a la inicial (ayuda: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$).