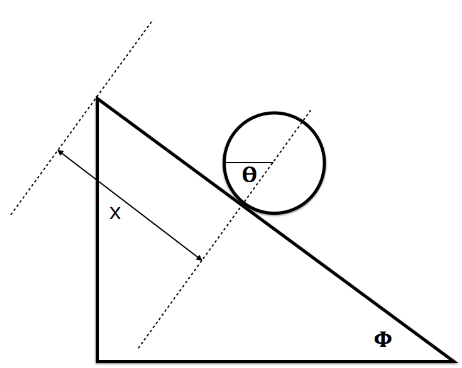
I Sistemas disipativos.

1. `(2.0 pt)` Marco formal.
   En sistema sometidos a pérdidas de energía por roce, es usual aproximar la fuerza disipativa por
   $$\vec{F}^d = -\vec{k}\cdot\vec{v}\hat{v}.$$
   Queremos introducir estas fuerzas en el formalismo de la mecánica analítica.
   a) Dé una expresión para la función de Rayleigh R, tal que $F_i^d = -\partial R/\partial \dot{x}_i$, donde x_i es un grado de libertad en coordenadas cartesianas.
   b) Demuestre que la ecuación de movimiento,
   $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} = 0,$$
   se escribe de igual forma en coordendas generalizadas $q_\sigma(\{x_i\}_{i=1}^n)$ (ayuda: demuestre que $\partial x_i/\partial q_\sigma = \partial \dot{x}_i/\partial \dot{q}_\sigma$).

2. `(4.0 pt)` Ejemplo.
   Consideramos un aro de radio r, con momento de inercia $I = Mr^2$, que rueda sin resbalar por una pendiente ϕ bajo la acción de la gravedad (ver figura).
   a) Si el ángulo de rotación del aro es θ y la distancia recorrida a lo largo de la pendiente es x, escriba la constricción de rotación sin resbalar entre $d\theta$ y dx.
   b) Escriba el Lagrangeano del sistema, tomando en cuenta la energía cinética de translación del aro según $\dot{x}$ y la de rotación, en $\dot{\theta}$ (recuerde incluir la energía potencial de gravedad).
   c) Como en este caso tenemos una constricción no-holonómica, la expresión general para la ecuación de movimiento incluyendo los multiplicadores de Lagrange sería
   $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} + \sum_\sigma \frac{\partial f}{\partial q_\sigma} = 0, \text{ para cada grado de libertad } q_\sigma.$$
   donde f sería la constricción si se pudiese integrar la relación entre r y θ. O sea $df = \sum_\sigma(\partial f/\partial q_\sigma)dq_\sigma = 0$. Escriba las ecuaciones de movimiento en x y en θ, incluyendo la técnica de multiplicadores de Lagrange.
   d) Identifique la fuerza de roce, y compare la aceleración con el caso sin fricción.
   e) Dé una expresión para la función de Rayleigh en este caso. Compare con la forma sugerida en el Punto 1, y comente.



II Pequeñas oscilaciones - teoría.

Sean $V\left(\{q_i\}_{i=1}^{n}\right)$ y $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m\dot{x_i}^2$ las energías potencial y cinética que describen un sistema de N partículas con n grados de libertad, coordenadas cartesianas $x_j\left(\{q_i\}_{i=1}^{n}\right),\ j = 1, \ldots, 3N$, y coordenadas generalizadas $q_j\left(\{x_i\}_{i=1}^{3N}\right),\ j = 1, \ldots, n \leq N$. Elegimos un sistema de coordendas generalizadas tal que $\{q_i\}_{i=1}^{n} = 0$ en equilibrio.

1. `( 1.0 pt)` Demuestre que en torno a los puntos de equlibrio, en Lagrangeano de pequeñas oscilaciones es $L = T - V$, con

$$V \approx \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} v_{jk} q_j q_k \tag{1}$$

$$T \approx \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \tag{2}$$

2. `( 1.0 pt)` ¿ A qué corresponden los “modos normales” del sistema? ¿Cuántos hay? Escriba la solución general del problema de pequeñas oscilaciones en función de los modos normales.

3. `( 2.0 pt)` Desmuestre que, para dos frecuencias características distintas ω^s y ω^t, los modos normales correspondientes $\rho_k^{s,t}$ satisfacen una relación de ortonormalidad:

$$\sum_{j,k} \rho_j^s m_{jk} \rho_k^t = \delta_{st}. \tag{3}$$

4. `( 2.0 pt)` Especificamos una condición inicial ‘pura’, que corresponde a un solo modo normal s, con velocidades iniciales $\dot{q}_\sigma(t=0) = 0$. Demuestre que en la evolución ulterior el sistema se quedará en este mismo modo normal para todo t.

III Pequeñas oscilaciones: aplicación, modelo de amortiguadores.

Un bloque uniforme de masa m, largo a y altura b está sostenido por dos resortes, uno en cada extremo. Las constantes elásticas de los resortes son k_1 y k_2, con $k_1 = k_2 = k$. Los resortes se mantienen verticales.

- (1.5 pt) Encuentre el momento de inercia del bloque y escriba el Lagrangeano.
- (1.0 pt) Encuentre las frecuencias propias del sistema.
- (1.0 pt) Encuentre los modos normales de oscilación del sistema.
- (1.0 pt) Encuentre un sistema de coordenadas generalizadas que permita desacoplar el Lagrangeano.
- (1.5 pt) En $t = 0$ el sistema está en su posición de equilibrio, pero el bloque es impulsado con velocidad $v_\circ$ hacia arriba en el punto de contacto con el resorte izquierdo. Calcule y grafique la trayectoria del sistema.