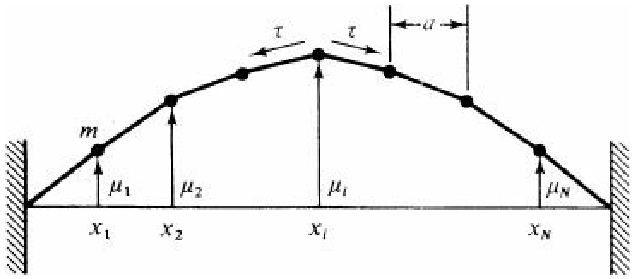
I Energía en la cuerda.



1. Considére un modelo discreto de cuerda con N masas m separadas por una distancia a en una cuerda sin masa, pero con tensión τ (ver Figura). El desplazamiento transveral de las masa i es μ_i.

   a) `(0.5 pt)` Muestre que la energía potencial del sistema es $V = \frac{\tau}{2a}\sum_{i=0}^{N}(\mu_{i+1}-\mu_i)^2$ y escriba el Lagrangeano y las ecuaciones de movimiento.

   b) `(1.0 pt)` Calcule el Lagrangeano y la ecuación de movimiento en límite continuo $m \to 0$, $a \to 0$, $m/a \to \sigma$, $N \to \infty$, partiendo del caso discreto, y concluya que $L = \int_0^l dx\mathcal{L}(u,\dot{u},u';x,t)$, con $\mu_i(t) = u(x_i,t)$.

2. El principio de mínima acción en medios contínuos permite concluir que

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial t)} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial x)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0.$$

   Definimos la densidad hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \mathcal{P}\frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{L}, \text{con } \mathcal{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial t}}.$$

   a) `(1 pt)` Demuestre que si L no depende explícitamente de t, entonces

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}\frac{\partial u}{\partial t}\right], \qquad (1)$$

   b) `(0.5 pt)` Por analogía con los sistemas discretos, explique porque Eq. 1 es una ecuación de continuidad para la densidad de energía en la cuerda, e identifique el vector flujo de energía 1-D, S_x.

   c) `(0.5 pt)` Extienda la ecuación de continuidad y la vector flujo de energía a 3-D, y discuta la conservación de la energía total en un volumen $\mathcal{V}$.

3. Considere una onda plana monocromática propagándose en una cuerda hacia $+\hat{x}$.

   a) `(0.5 pt)` Escriba la expresión de la onda $u(x,t)$ en notación compleja.

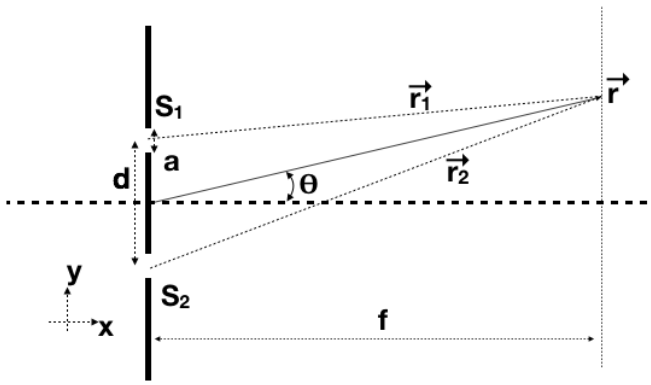
   b) `(1 pt)` Muestre que $S_x = \mathcal{H}c$, identifique c y comente porque esta expresión destaca el carácter de transporte de energía que mide $\vec{S}$.

   c) `(1 pt)` Muestre que en el promedio temporal,

$$\langle S\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T S dt = \frac{1}{2}A^2(\tau k^2 c) = \frac{1}{2}A^2\sigma c\omega^2,$$

   donde A es la amplitud de la onda, y concluya que $\langle S\rangle \propto \|u\|^2$.

II Rendijas de Young.



1. Interferencias.
Consideremos el experimento de las rendijas de Young (ver Figura), en el que una onda plana monocromática $u(x,t)$, con longitud de onda λ, incide sobre dos rendijas rectangulares, separadas por una distancia d, y tal que el ancho de cada rendija es mucho menor que su largo. El flujo de energía en el punto $\vec{r}$ es $F = \langle S(\vec{r}) \rangle \propto \|u(\vec{r},t)\|^2$. Las rendijas S_1 y S_2 actúan como fuentes secundarias, con igual amplitud A y en fase. Consideramos el caso $f \gg d$, de manera que las ondas emitidas por S_1 y S_2 también son planas.

   a) (`1 pt`) Escriba una expresión, en notación compleja, para la superposición $u = u_1 + u_2$ de las dos ondas provenientes de S_1 y S_2.

   b) (`1 pt`) Muestre que
$$F = \|A\|^2[2\cos(k_2 r_2 - k_1 r_1) + 2],$$
donde k_i son los números de ondas provenientes de cada fuente S_i, y los r_i estan indicados en la Figura.

   c) (`2 pt`) Muestre que en límite $f \gg d$, y si $\theta \ll 1$,
$$F(\theta) = \|A\|^2 \left[2\cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\theta\right) + 2\right],$$
Grafique el patrón de interferencias.

2. Diffracción.
Consideramos que cada rendija tiene un ancho finito a, y olvidamos de momento la segunda rendija. Colocamos ahora el origen en el centro de la rendija S_1. Suponemos que cada punto en el continuo según el eje $\hat{y}$ se comporta como una fuente secundaria - en este continuo todas las fuentes secundarias estan en fase y tienen la misma amplitud $\mathcal{A}$. La superposición de ondas en el punto $\vec{r}$ es $u(\vec{r},t) = \int_{-a/2}^{a/2} dy\, u(y,t)$.

   a) (`1 pt`) Muestre que, en el límite $f \gg a$,
$$u(\vec{r},t) \propto \int_{-a/2}^{a/2} dy \exp\left(iky\sin(\theta)\right).$$

   b) (`1 pt`) Muestre que el flujo en el punto $\vec{r}$ es
$$F(\vec{r},t) = F_\circ \left[\frac{\sin(\pi a \sin(\theta)/\lambda))}{a\sin(\theta)/\lambda}\right]^2. \quad \text{Grafique } F(\theta).$$

3. (`+2 pt`) Escriba y grafique el patrón de interferencias y difracción que se observaría en función de θ, d y a, si $\theta \ll 1$ y si $f \gg d \gg a$.