

Vibraciones y Ondas

Simon Casassus Astronomía, Universidad de Chile

<http://www.das.uchile.cl/~simon>

- I Mecánica de Lagrange
- II Pequeñas oscilaciones
- III Ondas

Parte II

Pequeñas Oscilaciones

- 1 Solución general
- 2 Coordenadas Normales
- 3 Muchos grados de libertad
- 4 Límite continuo



Solución general

- Formulación
- Modos normales
- Solución general

Coordenadas Normales

- Matriz modal
- Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

- Problemas de N cuerpos
- Frecuencias normales
- Modos normales

Límite continuo

- Paso al continuo
- Solución en modos normales
- Lagrangeano para la cuerda
- Coordenadas normales
- Hamiltoniano
- Mínima acción en medios continuos

Plan

1 Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

2 Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

3 Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

4 Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos



Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

Plan

1 Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

2 Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

3 Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

4 Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos



Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

1.1-Formulación

- Vamos a considerar perturbaciones en torno al equilibrio de un sistema conservativo, con constricciones independientes de t .
- Energía cinética en coord. gen.:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \lambda} m_{\sigma\lambda} \dot{q}_\sigma \dot{q}_\lambda, \text{ con } \sigma, \lambda = 1, \dots, n,$$

donde $m_{\sigma\lambda} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \frac{\partial x_i}{\partial q_\lambda}$.

- Perturbaciones: $q_\sigma = \bar{q}_\sigma + \eta_\sigma$.
- En equilibrio, $Q_\sigma \equiv \frac{\partial V}{\partial q_\sigma} = 0$, y

$$V \approx V_0 + \sum_{\sigma, \lambda} \frac{1}{2} \overbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial q_\sigma \partial q_\lambda}}^{v_{\sigma\lambda}} \Big|_{\{\bar{q}_\sigma\}} \eta_\sigma \eta_\lambda.$$

- El Lagrangeano es

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \lambda} m_{\sigma\lambda} \dot{\eta}_\lambda \dot{\eta}_\sigma - v_{\sigma\lambda} \eta_\sigma \eta_\lambda \quad (1)$$

$$\Rightarrow \sum_{\lambda} m_{\sigma\lambda} \ddot{\eta}_\lambda + v_{\sigma\lambda} \eta_\lambda = 0. \quad (2)$$



Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

Plan

1 Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

2 Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

3 Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

4 Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos



Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

Un grado de libertad



- $m_{\sigma\lambda} \equiv m, v_{\sigma\lambda} \equiv k.$
- Solución de Eq. 2 es $\eta = \text{Re}(z),$

$$z(t) = z_+ e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + z_- e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}, \text{ si } k > 0,$$

$$z(t) = z_+ e^{\sqrt{\frac{k}{m}}t} + z_- e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}, \text{ si } k < 0,$$

•

$$\Rightarrow \eta = \rho \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi \right).$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

n grados de libertad



- Pasando a \mathbb{C} , Eq. 2 se escribe

$$\sum_{\lambda} m_{\sigma\lambda} \ddot{z}_{\lambda} + v_{\sigma\lambda} z_{\lambda} = 0, \text{ con } \eta_{\sigma} = \Re(z_{\sigma}). \quad (3)$$

- Buscamos soluciones de Eq. 3 en modos normales, en que todas las coordenadas oscilan con la misma frecuencia:

$$z_{\sigma} = z_{\sigma}^s \exp(i\omega t).$$

- Sustitución en Eq. 3 da

$$\sum_{\lambda=1}^n \underbrace{(v_{\sigma\lambda} - \omega^2 m_{\sigma\lambda})}_{a_{\sigma\lambda}} z_{\lambda}^s = 0 \quad (4)$$

- Eq. 4 tiene soluciones no triviales solo si $\det(a_{\sigma\lambda}) = 0$,

$$|v_{\sigma\lambda} - \omega^2 m_{\sigma\lambda}| = 0 \Rightarrow n \text{ raíces complejas } \omega_s^2, s = 1, \dots, n.$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

n grados de libertad



- Props: los ω_s^2 son reales positivos (ver demo en clase).
- Como $\det(\mathbf{a}_{\sigma\lambda}) = 0$, una de las n ecuaciones en Eq. 4 es combinación lineal de las otras. Eliminando la n -ésima, la Ley de Cramer nos da z_σ :

$$\begin{aligned} a_{1,1} \frac{z_1}{z_n} + \cdots + a_{1,(n-1)} \frac{z_{n-1}}{z_n} &= -a_{1,n} \\ &\vdots \\ a_{(n-1),1} \frac{z_1}{z_n} + \cdots + a_{(n-1),(n-1)} \frac{z_{n-1}}{z_n} &= -a_{(n-1),n} \end{aligned} \quad (5)$$

- Vemos que z_σ^S/z_n es real porque todos los coefs $a_{\sigma\lambda}$ son reales.

$$\Rightarrow z_\sigma^S = e^{i\phi_s} \rho_\sigma^S, \text{ con } (\phi_s, \rho_\sigma^S) \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangiano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

Modos ortonormales



- Sustitución de Eq. 6 en Eq. 3 y combinando dos frecuencias normales s y t llegamos a

$$\sum_{\lambda\sigma} \rho_{\sigma}^t m_{\sigma\lambda} \rho_{\lambda}^s = \delta_{st} \quad (7)$$

- El modo normal correspondiente a la frecuencia normal (o 'autovalor') es

$$z_{\sigma}^s = C^s e^{i\phi_s} \rho_{\sigma}^s,$$

en que C^s y ϕ^s son las únicas constantes reales por especificar.

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangiano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

Plan

1 Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

2 Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

3 Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

4 Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos



Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

1.3-Solución general

- $z_\sigma(t) = \sum_{s=1}^n (z_+^s)_\sigma e^{i\omega_s t} + (z_-^s)_\sigma e^{-i\omega_s t}$, $\sigma = 1, \dots, n$.
- Tomando parte real, $\eta_\sigma = \frac{1}{2}(z_\sigma^s + z_\sigma^{s*})$, y definiendo $(z_+^s)_\sigma + (z_+^s)_\sigma^* = C^s \rho_\sigma^s e^{i\phi_s}$, llegamos a

$$\eta_\sigma = \sum_{i=1}^n \rho_\sigma^s C^s \cos(\omega_s t + \phi_s).$$

- para determinar las constantes ϕ_s y C^s se usan las condiciones iniciales, $\eta_\sigma(0)$ y $\dot{\eta}_\sigma(0)$, y usando Eq. 7,

$$\sum_{\sigma, \lambda} \rho_\lambda^t m_{\lambda, \sigma} \eta_\sigma(0) = C^t \cos(\phi_t)$$

$$\sum_{\sigma, \lambda} \rho_\lambda^t m_{\lambda, \sigma} \dot{\eta}_\sigma(0) = -\omega_t C^t \sin(\phi_t)$$

\Rightarrow despejamos C^t y $\tan(\phi_t)$.



Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangiano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

Plan

- 1 Solución general**
 - Formulación
 - Modos normales
 - Solución general
- 2 Coordenadas Normales**
 - Matriz modal
 - Coordenadas normales
- 3 Muchos grados de libertad**
 - Problemas de N cuerpos
 - Frecuencias normales
 - Modos normales
- 4 Límite continuo**
 - Paso al continuo
 - Solución en modos normales
 - Lagrangeano para la cuerda
 - Coordenadas normales
 - Hamiltoniano
 - Mínima acción en medios continuos



Solución general

- Formulación
- Modos normales
- Solución general

Coordenadas Normales

- Matriz modal
- Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

- Problemas de N cuerpos
- Frecuencias normales
- Modos normales

Límite continuo

- Paso al continuo
- Solución en modos normales
- Lagrangeano para la cuerda
- Coordenadas normales
- Hamiltoniano
- Mínima acción en medios continuos

Plan

- 1 Solución general**
 - Formulación
 - Modos normales
 - Solución general
- 2 Coordenadas Normales**
 - Matriz modal
 - Coordenadas normales
- 3 Muchos grados de libertad**
 - Problemas de N cuerpos
 - Frecuencias normales
 - Modos normales
- 4 Límite continuo**
 - Paso al continuo
 - Solución en modos normales
 - Lagrangeano para la cuerda
 - Coordenadas normales
 - Hamiltoniano
 - Mínima acción en medios continuos



Solución general

- Formulación
- Modos normales
- Solución general

Coordenadas Normales

- Matriz modal
- Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

- Problemas de N cuerpos
- Frecuencias normales
- Modos normales

Límite continuo

- Paso al continuo
- Solución en modos normales
- Lagrangeano para la cuerda
- Coordenadas normales
- Hamiltoniano
- Mínima acción en medios continuos

2.1-Matriz modal



- Definimos la matriz modal $\mathcal{A}_{\lambda\sigma} = \rho_{\lambda}^{\sigma}$, es una matriz cuadrada independiente de las condiciones iniciales.
- prop.: la matriz modal diagonaliza la matriz masa $m_{\lambda\sigma}$:

$$\mathcal{A}^T m \mathcal{A} = \mathbb{I}.$$

- prop.: la matriz modal diagonaliza la matriz potencial $v_{\lambda\sigma}$:

$$\mathcal{A}^T v \mathcal{A} \Big|_{\sigma\lambda} = \omega_{\sigma} \mathbb{I} \Big|_{\sigma\lambda}.$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

Plan

- 1 Solución general**
 - Formulación
 - Modos normales
 - Solución general
- 2 Coordenadas Normales**
 - Matriz modal
 - Coordenadas normales
- 3 Muchos grados de libertad**
 - Problemas de N cuerpos
 - Frecuencias normales
 - Modos normales
- 4 Límite continuo**
 - Paso al continuo
 - Solución en modos normales
 - Lagrangeano para la cuerda
 - Coordenadas normales
 - Hamiltoniano
 - Mínima acción en medios continuos



Solución general

Formulación
Modos normales
Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos
Frecuencias normales
Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo
Solución en modos normales
Lagrangeano para la cuerda
Coordenadas normales
Hamiltoniano
Mínima acción en medios continuos

2.2-Coordenadas normales

- Definimos un nuevo set de coordenadas generalizadas, ζ_σ , con

$$\eta(t) = \mathcal{A}\zeta(t), \text{ o bien, } \mathcal{A}^T m \eta(t) = \zeta(t).$$

- El Lagrangeano Eq. 1 se escribe

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \lambda} m_{\sigma\lambda} \dot{\eta}_\lambda \dot{\eta}_\sigma - v_{\sigma\lambda} \eta_\sigma \eta_\lambda = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} (\dot{\zeta}_\sigma)^2 - \omega_\sigma^2 \zeta_\sigma^2$$

- Las ecuaciones de movimiento son entonces

$$\ddot{\zeta}_\sigma = -\omega_\sigma^2 \zeta_\sigma, \quad \sigma = 1, \dots, n.$$

- Vemos que las coordenadas normales desacoplan el problema de pequeñas oscilaciones. Las soluciones son,

$$\zeta_\sigma = C^\sigma \cos(\omega_\sigma t + \phi_\sigma), \text{ y usando la definición de } \zeta_\sigma,$$

$$\eta_\lambda = \sum_{\sigma} \rho_\lambda^\sigma C^\sigma \cos(\omega_\sigma t + \phi_\sigma).$$



Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

Ejemplos

- Dos péndulos acoplados
- Ortogonalización de Graham-Schmidt (Fetter 4.10)



Solución general

Formulación
Modos normales
Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos
Frecuencias normales
Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo
Solución en modos normales
Lagrangeano para la cuerda
Coordenadas normales
Hamiltoniano
Mínima acción en medios continuos

Plan

1 Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

2 Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

3 Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

4 Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos



Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

Plan

- 1 Solución general**
 - Formulación
 - Modos normales
 - Solución general
- 2 Coordenadas Normales**
 - Matriz modal
 - Coordenadas normales
- 3 Muchos grados de libertad**
 - Problemas de N cuerpos
 - Frecuencias normales
 - Modos normales
- 4 Límite continuo**
 - Paso al continuo
 - Solución en modos normales
 - Lagrangeano para la cuerda
 - Coordenadas normales
 - Hamiltoniano
 - Mínima acción en medios continuos



Solución general

- Formulación
- Modos normales
- Solución general

Coordenadas Normales

- Matriz modal
- Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

- Frecuencias normales
- Modos normales

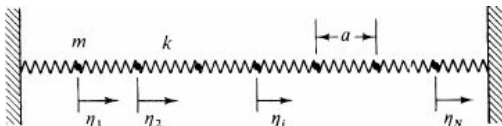
Límite continuo

- Paso al continuo
- Solución en modos normales
- Lagrangeano para la cuerda
- Coordenadas normales
- Hamiltoniano
- Mínima acción en medios continuos

3.1-Problemas de N cuerpos



- Modelo de red cristalina 1 – D .



$$L = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^N \dot{\eta}_i^2 - \frac{1}{2} k \sum_{i=0}^N (\eta_{i+1} - \eta_i)^2, \text{ con } \eta_0 = \eta_{N+1} = 0,$$

$$m\ddot{\eta}_i + 2k\eta_i - k(\eta_{i+1} + \eta_{i-1}) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangiano para la cuerda

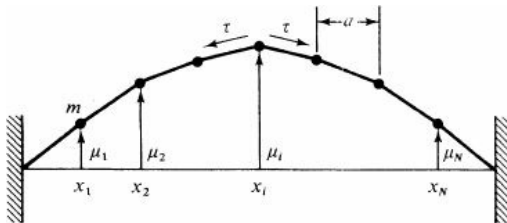
Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

3.1-Problemas de N cuerpos

- Oscilaciones transversas de N masas en una cuerda sin masa.



Mécanica vectorial da ec. de mov.:

$$m\ddot{\mu}_i + \frac{2\tau}{a}\mu_i - \frac{\tau}{a}(\mu_{i+1} + \mu_{i-1}) = 0 \text{ con } \mu_0 = \mu_{N+1} = 0. \quad (8)$$

Similitud con modelo de red 1 - D sugiere $k \leftrightarrow \tau/a$ y

$$L = \frac{1}{2}m \sum_i (\dot{\mu}_i)^2 - \frac{\tau}{2a} \sum_{i=0}^N (\mu_{i+1} - \mu_i)^2. \quad (9)$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangiano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

Plan

- 1 Solución general**
 - Formulación
 - Modos normales
 - Solución general
- 2 Coordenadas Normales**
 - Matriz modal
 - Coordenadas normales
- 3 Muchos grados de libertad**
 - Problemas de N cuerpos
 - Frecuencias normales
 - Modos normales
- 4 Límite continuo**
 - Paso al continuo
 - Solución en modos normales
 - Lagrangeano para la cuerda
 - Coordenadas normales
 - Hamiltoniano
 - Mínima acción en medios continuos



Solución general

- Formulación
- Modos normales
- Solución general

Coordenadas Normales

- Matriz modal
- Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

- Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

- Modos normales

Límite continuo

- Paso al continuo
- Solución en modos normales
- Lagrangeano para la cuerda
- Coordenadas normales
- Hamiltoniano
- Mínima acción en medios continuos

3.2-Frecuencias normales



- Modos normales $\mu_i = C\rho_i \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow$

$$\text{Ec. de mov. } \left(\frac{2\tau}{a} - m\omega^2\right)\rho_i - \frac{\tau}{a}(\rho_{i+1} + \rho_{i-1}) = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\text{con } \rho_0 = \rho_{N+1} = 0.$$

- Introduciendo $\lambda \equiv 2 - \frac{m\omega^2 a}{\tau}$,

$$\lambda\rho_i - (\rho_{i+1} + \rho_{i-1}) = 0.$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

3.2-Frecuencias normales

- El conjunto de ecuaciones lineales $\lambda \rho_i - (\rho_{i+1} + \rho_{i-1}) = 0$ tiene soluciones no triviales solo si su determinante $D_N = 0$. \Rightarrow (ver cátedra)

$$D_N = \lambda D_{N-1} - D_{N-2}.$$

- Buscamos soluciones en $D_N = Ae^{iBN}$,

$$\longrightarrow D_N = A_+ e^{iN\psi} + A_- e^{-iN\psi}, \text{ con } \lambda \equiv 2 \cos(\psi).$$

Los A_{\pm} estan dados por D_1 y D_2 :

$$D_N = \frac{\sin((N+1)\psi)}{\sin(\psi)} = 0, \Rightarrow (N+1)\psi = n\pi, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \psi \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

- Usando $\lambda = 2 - m\omega^2 a/\tau = 2 \cos(\psi)$,

$$\omega^2 = \frac{2\tau}{ma} (1 - \cos(\psi)) = \frac{4\tau}{ma} \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right).$$

- De Ec. 10,

$$\omega^2 = \frac{4\tau}{ma} \sin^2\left(\frac{1}{2} \frac{n\pi}{N+1}\right), n = 1, \dots, N.$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangiano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

Plan

- 1 Solución general**
 - Formulación
 - Modos normales
 - Solución general
- 2 Coordenadas Normales**
 - Matriz modal
 - Coordenadas normales
- 3 Muchos grados de libertad**
 - Problemas de N cuerpos
 - Frecuencias normales
 - Modos normales
- 4 Límite continuo**
 - Paso al continuo
 - Solución en modos normales
 - Lagrangeano para la cuerda
 - Coordenadas normales
 - Hamiltoniano
 - Mínima acción en medios continuos



Solución general

- Formulación
- Modos normales
- Solución general

Coordenadas Normales

- Matriz modal
- Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

- Problemas de N cuerpos
- Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

- Paso al continuo
- Solución en modos normales
- Lagrangeano para la cuerda
- Coordenadas normales
- Hamiltoniano
- Mínima acción en medios continuos

3.3-Modos normales



- Sustitución de las frecuencias normales en la Ec. de mov. Ec. 8 da

$$2 \cos \left(\frac{n\pi}{N+1} \right) \rho_i^n = \rho_{i+1}^n + \rho_{i-1}^n.$$

- Las soluciones están dadas por el mismo método que para las raíces de $D_N = 0$, pero es interesante un método alternativo: Introducimos $\mu(x_j) = \mu_j$, con $x_j = ja$, y buscamos soluciones de la forma

$$\mu(x_j, t) = \Re(A \exp(i[kx_j - \omega t])), \quad (11)$$

o bien con $-k$.

- Sustitución de Ec. 11 en Ec. 8 da

$$\omega^2 = \frac{2\tau}{ma} (1 - \cos(ka)) = \frac{4\tau}{ma} \sin^2 \left(\frac{ka}{2} \right).$$

Solución general

Formulación
Modos normales
Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal
Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos
Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo
Solución en modos normales
Lagrangiano para la cuerda
Coordenadas normales
Hamiltoniano
Mínima acción en medios continuos

3.3-Modos normales



Usamos dos tipos de condiciones de borde:

- Condiciones de borde periódicas

$$\mu(x_j) = \mu(x_{N+j}) = \mu(x_j + Na),$$

y usando Ec. 11, $e^{ikNa} = 1 \Leftrightarrow k = 2n\pi/Na$, con

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \frac{1}{2}(N-1) \text{ para } N \text{ impar,}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \frac{1}{2}(N-1), \frac{N}{2} \text{ para } N \text{ par,}$$

En que usamos la condición de que deben haber exactamente N modos normales.

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

3.3-Modos normales

- Condiciones de borde con extremos fijos.
 - La solución general del tipo Ec. 11 es

$$\mu(x_j, t) = \Re(A_+ e^{i[kx_j - \omega t]} + A_- e^{i[-kx_j - \omega t]}),$$

y las condición $\mu(0) = 0$ da $A_+ = -A_-$.

- Con $\mu(x_{N+1}) = \mu((N+1)a) = 0$ tenemos

$$\sin(k(N+1)a) = 0 \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a(N+1)}, \quad n = 1, \dots, N.$$

- Vemos que la expresión para $k(n)$ es equivalente al aplicar la 'relación de dispersión' Ec. 27 a las $\omega(n)$ dadas por el método $D_N = 0$.
- Con este método alternativo tenemos la expresión para los modos normales:

$$\mu(x_j, t) = 2iA_n \sin\left(\frac{n\pi x_j}{a(N+1)}\right) \exp(i\omega t),$$

vemos que $\mu(x_j, t) \propto \rho_j^n$ pero sin normalizar, ver aux..



Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangiano para la cuerda

Coordenadas normales

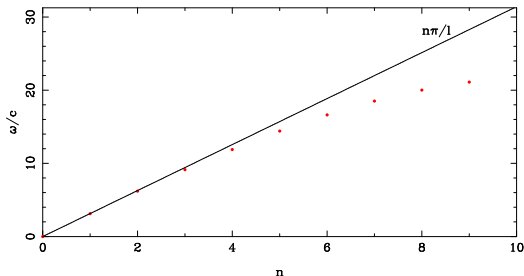
Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

3.3-Modos normales

En resumen, graficamos

$$\omega_n/c = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{n\pi a}{l2}\right), \text{ con } l \equiv (N+1)a, \text{ donde } c \equiv \sqrt{\tau/(m/a)}.$$



Notar la existencia de una frecuencia normal máxima para sistemas discretos. Cuando $N \gg 1$, $(\omega_n/c)_{\max} \approx 2/a$, con una longitud de onda mínima $\lambda = 2a(N+1)/n > 2a$.

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

Plan

- 1 Solución general**
 - Formulación
 - Modos normales
 - Solución general
- 2 Coordenadas Normales**
 - Matriz modal
 - Coordenadas normales
- 3 Muchos grados de libertad**
 - Problemas de N cuerpos
 - Frecuencias normales
 - Modos normales
- 4 Límite continuo**
 - Paso al continuo
 - Solución en modos normales
 - Lagrangeano para la cuerda
 - Coordenadas normales
 - Hamiltoniano
 - Mínima acción en medios continuos



Solución general

- Formulación
- Modos normales
- Solución general

Coordenadas Normales

- Matriz modal
- Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

- Problemas de N cuerpos
- Frecuencias normales
- Modos normales

Límite continuo

- Paso al continuo
- Solución en modos normales
- Lagrangeano para la cuerda
- Coordenadas normales
- Hamiltoniano
- Mínima acción en medios continuos

Plan

- 1 Solución general**
 - Formulación
 - Modos normales
 - Solución general
- 2 Coordenadas Normales**
 - Matriz modal
 - Coordenadas normales
- 3 Muchos grados de libertad**
 - Problemas de N cuerpos
 - Frecuencias normales
 - Modos normales
- 4 Límite continuo**
 - Paso al continuo
 - Solución en modos normales
 - Lagrangeano para la cuerda
 - Coordenadas normales
 - Hamiltoniano
 - Mínima acción en medios continuos



Solución general

- Formulación
- Modos normales
- Solución general

Coordenadas Normales

- Matriz modal
- Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

- Problemas de N cuerpos
- Frecuencias normales
- Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

- Solución en modos normales
- Lagrangeano para la cuerda
- Coordenadas normales
- Hamiltoniano
- Mínima acción en medios continuos

4.1-Paso al continuo



- Tomamos el ejemplo de las oscilaciones transversas de una cuerda con masas, y llevamos $N \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$, con $\sigma = m/a$ constante.

- \Rightarrow

$$\omega_n \rightarrow c \frac{n\pi}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Soluciones en modos normales (\sim ondas planas)
 $\mu(x, t) = A \exp(i[kx - \omega t])$, con
 $k = (2\pi n)/l, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$.

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

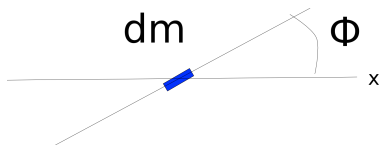
Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

Tratamiento directo



- Ec. de mov. de la cuerda. $\sin(\phi) \sim \phi \sim \tan \phi = \partial u / \partial x$.

$$\text{Newton: } \sigma dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau(x + dx) \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+dx} - \tau(x) \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

- Tarea: verificar que se obtiene la misma ecuación desde Ec. 8 pasando al continuo.
- Si σ y τ son constantes llegamos a Ec. de ondas 1-D:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (12)$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangiano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

Plan

- 1 Solución general**
 - Formulación
 - Modos normales
 - Solución general
- 2 Coordenadas Normales**
 - Matriz modal
 - Coordenadas normales
- 3 Muchos grados de libertad**
 - Problemas de N cuerpos
 - Frecuencias normales
 - Modos normales
- 4 Límite continuo**
 - Paso al continuo
 - Solución en modos normales
 - Lagrangeano para la cuerda
 - Coordenadas normales
 - Hamiltoniano
 - Mínima acción en medios continuos



Solución general

- Formulación
- Modos normales
- Solución general

Coordenadas Normales

- Matriz modal
- Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

- Problemas de N cuerpos
- Frecuencias normales
- Modos normales

Límite continuo

- Paso al continuo

Solución en modos normales

- Lagrangeano para la cuerda
- Coordenadas normales
- Hamiltoniano
- Mínima acción en medios continuos

4.2-Solución en modos normales

- Ponemos $u(x, t) = C\rho(x) \cos(\omega t + \phi)$.
- Sustitución en Ec. de ondas, Ec. 12, da:

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} + k^2\rho = 0, \text{ con, } k = \omega/c \Rightarrow \rho(x) = A \sin(kx + \theta).$$

- Extremos fijos, $\rho(0) = \rho(l) = 0 \rightarrow \rho(x) \propto \sin(kx)$, con $k = n\pi/l$, $n \in \mathbb{N}$.
- Para satisfacer condiciones de bordes, **el largo de la cuerda debe ser un múltiplo de la longitud de onda media**, i.e. $\lambda = 2l/n$.
- Vemos que el desplazamiento transversal en el caso continuo es el mismo que en el caso discreto.
- Por analogía con caso discreto, la solución general de la ec. de ondas se construye por superposición de los modos normales,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^n(x) \cos(\omega_n t + \phi_n). \quad (13)$$



Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangiano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

4.2-Solución en modos normales



- O bien, en notación de Fourier, Ec. 13 se escribe

$$u(x, t) = \sum_n \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \sin(k_n x) [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)], \quad (14)$$

donde, $a_n = C_n \cos(\phi_n)$, $b_n = -C_n \sin(\phi_n)$.

- a_n y b_n se despejan de las condiciones iniciales $u(x, t = 0)$ y $\dot{u}(x, t = 0)$, usando la ortonormalidad de los modos.
- En el caso continuo, la relación de ortonormalidad, Ec. 7, se escribe

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty, a \rightarrow 0} \sum_{\mu=1}^N a \rho^t(x_\mu) \frac{m}{a} \rho^s(x_\mu) &= \delta_{st}, \\ \Rightarrow \int_0^l dx \rho^t(x) \sigma \rho^s(x) &= \delta_{st}. \end{aligned} \quad (15)$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

4.2-Solución en modos normales



- Tarea: confirmar Ec. 15 para modos normales continuos 1D.
- Con la ortonormalidad, podemos despejar los a_n y b_n de Ec. 14 usando las condiciones iniciales:

$$a_n = \int_0^l \rho^n(x) u(x, 0) \sigma dx = \sqrt{2} l \sigma \int_0^k \sin(k_n x) u(x, 0) \sigma dx,$$

$$\omega_n b_n = \int_0^l \rho^n(x) \dot{u}(x, 0) \sigma dx = \sqrt{\frac{2}{l \sigma}} \int_0^l \sin(k_n x) \dot{u}(x, 0) \sigma dx.$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

Plan

- 1 Solución general**
 - Formulación
 - Modos normales
 - Solución general
- 2 Coordenadas Normales**
 - Matriz modal
 - Coordenadas normales
- 3 Muchos grados de libertad**
 - Problemas de N cuerpos
 - Frecuencias normales
 - Modos normales
- 4 Límite continuo**
 - Paso al continuo
 - Solución en modos normales
 - Lagrangeano para la cuerda
 - Coordenadas normales
 - Hamiltoniano
 - Mínima acción en medios continuos



Solución general

Formulación
Modos normales
Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal
Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos
Frecuencias normales
Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo
Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales
Hamiltoniano
Mínima acción en medios continuos

Lagrangeano por límite continuo



- De Ec. 9,

$$L = \frac{1}{2} \frac{m}{a} \sum_i a(\dot{\mu}_i)^2 - \frac{\tau}{2a} \sum_{i=0}^N a \left(\frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{a} \right)^2.$$

- Pasando al límite continuo, $a \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, $\mu_i(t) = u(x_i, t)$,

$$L = \frac{\sigma}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{\tau}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

Lagrangiano por tratamiento directo

- La energía cinética de un elto de masa dm es

$$\frac{1}{2}dm \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2,$$

- Para la cuerda entera,

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l dx \sigma \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2.$$

- La energía potencial esta dada por el trabajo que ejercen las fuerzas de tension **internas a dm , que tienden a devolverlo a su largo en reposo dx :**

$$\begin{aligned} dW &= -\tau(ds - dx) = -\tau dx \left[\left\{ 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\}^{1/2} - 1 \right] \\ &\approx \frac{\tau}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 dx = -dU. \quad \rightarrow \quad V = \frac{\tau}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \end{aligned}$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas

Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangiano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

Plan

- 1 Solución general**
 - Formulación
 - Modos normales
 - Solución general
- 2 Coordenadas Normales**
 - Matriz modal
 - Coordenadas normales
- 3 Muchos grados de libertad**
 - Problemas de N cuerpos
 - Frecuencias normales
 - Modos normales
- 4 Límite continuo**
 - Paso al continuo
 - Solución en modos normales
 - Lagrangeano para la cuerda
 - Coordenadas normales**
 - Hamiltoniano
 - Mínima acción en medios continuos



Solución general

Formulación
Modos normales
Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal
Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos
Frecuencias normales
Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo
Solución en modos normales
Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano
Mínima acción en medios continuos

4.4-Coordenadas normales



- Solución general cuerda con extremos fijos:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(x) C_n \cos(\omega_n t + \phi_n), \quad (16)$$

$$\text{con } \rho_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \text{ y } \int_0^l dx \rho_n(x) \sigma \rho_m(x) = \delta_{mn}$$

- Del parecido con $\mu_i(t) = \sum_{i=1}^N \rho_i^n \zeta_n$, definimos

$$\zeta_n(t) = C_n \cos(\omega_n t + \phi_n), \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(x) \zeta_n(t).$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangiano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

4.4-Coordenadas normales

- Integrando por partes $V = \frac{\tau}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$, y usando ec. de ondas en Eq. 16 para $\partial^2 u_n(x)/\partial x^2$:

$$V(x) = \frac{\tau}{2} \int_0^l \left[\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(x) C_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \right] \left[\sum_{m=1}^{\infty} \rho_m(x) C_m k_m^2 \cos(\omega_m t + \phi_m) \right], \quad (17)$$

y usando la ortonormalidad de los modos,

$$V(x) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2 \zeta_m^2.$$

- Para la energía cinética, $T = \frac{1}{2} \int dx \sigma (\partial u / \partial t)^2$, tenemos

$$T = \frac{1}{2} \sum_m (\dot{\zeta}_m)^2.$$

- Desacoplamos el Lagrangeano:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (\dot{\zeta}_m^2 - \omega_m^2 \zeta_m^2), \text{ con ec. de mov } \ddot{\zeta}_m = -\omega_m^2 \zeta_m.$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

Plan

- 1 Solución general**
 - Formulación
 - Modos normales
 - Solución general
- 2 Coordenadas Normales**
 - Matriz modal
 - Coordenadas normales
- 3 Muchos grados de libertad**
 - Problemas de N cuerpos
 - Frecuencias normales
 - Modos normales
- 4 Límite continuo**
 - Paso al continuo
 - Solución en modos normales
 - Lagrangeano para la cuerda
 - Coordenadas normales
 - Hamiltoniano
 - Mínima acción en medios continuos



Solución general

Formulación
Modos normales
Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal
Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos
Frecuencias normales
Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo
Solución en modos normales
Lagrangeano para la cuerda
Coordenadas normales
Hamiltoniano
Mínima acción en medios continuos

4.5-Hamiltoniano



- $H = T + V$ ya que \mathcal{L} no depende de t , ni tampoco la relación entre (x, y) y las coord. gen. u_i .
- $\Rightarrow H = T + V = \frac{1}{2}\sigma \int_0^l dx \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\tau \int_0^l dx \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$
- $\Rightarrow H = E = \frac{1}{2} \sum_n ((\dot{\zeta}_n)^2 + \omega_n^2 (\zeta_n)^2)$, y usando $\zeta_n = C_n \cos(\omega_n t + \phi_n)$,

$$H = E = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 C_n^2.$$

Solución general

Formulación

Modos normales

Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal

Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos

Frecuencias normales

Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo

Solución en modos normales

Lagrangiano para la cuerda

Coordenadas normales

Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

Plan

- 1 Solución general**
 - Formulación
 - Modos normales
 - Solución general
- 2 Coordenadas Normales**
 - Matriz modal
 - Coordenadas normales
- 3 Muchos grados de libertad**
 - Problemas de N cuerpos
 - Frecuencias normales
 - Modos normales
- 4 Límite continuo**
 - Paso al continuo
 - Solución en modos normales
 - Lagrangeano para la cuerda
 - Coordenadas normales
 - Hamiltoniano
 - Mínima acción en medios continuos



Solución general

Formulación
Modos normales
Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal
Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos
Frecuencias normales
Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo
Solución en modos normales
Lagrangeano para la cuerda
Coordenadas normales
Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos

4.6-Mínima acción en medios continuos



- Introducimos la densidad Lagrangeana $\mathcal{L}(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}; x, t)$:

$$\delta S = 0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx \mathcal{L}(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}; x, t) = 0.$$

- Considerando una variación δu con $\delta u(x=0, t) = \delta u(x=l, t) = \delta u(x, t_1) = \delta u(x, t_2) = 0$, i.e. con condiciones de bordes fijas, llegamos a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial t)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u / \partial x)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0.$$

- Con $L = \int_0^l dx \underbrace{\left(\frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right)}_{\mathcal{L}}$, recuperamos ec.

de ondas 1D.

Solución general

Formulación
Modos normales
Solución general

Coordenadas Normales

Matriz modal
Coordenadas normales

Muchos grados de libertad

Problemas de N cuerpos
Frecuencias normales
Modos normales

Límite continuo

Paso al continuo
Solución en modos normales

Lagrangeano para la cuerda

Coordenadas normales
Hamiltoniano

Mínima acción en medios continuos