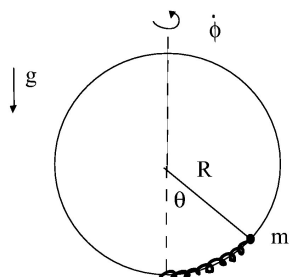


(Desarrolle sus respuestas y **cuide la presentación.**)

I Partícula en un aro.



Una masa puntual m puede deslizarse sin roce sobre un anillo de radio R colocado en posición vertical en el campo gravitacional terrestre. El anillo gira con velocidad angular constante sobre un eje vertical que pasa por su centro y la masa m está unida a un resorte de constante k fijo al otro extremo en el punto más bajo del anillo. El resorte tiene largo natural $R\theta_0$.

1. (2 pt) Escriba el Lagrangeano del sistema.
2. (2 pt) Escriba las cantidades conservadas del sistema.
3. (1 pt) Defina un potencial efectivo para el sistema, tal que $d^2\theta/dt^2 = -dV_{\text{eff}}(\theta)/d\theta$.
4. (1 pt) Determine puntos fijos, con θ constante, y estudie su estabilidad.

II Fuerzas de Constricción.

Una argolla de masa m está restringida a moverse en una hélice que en coordenadas cilíndricas está dada por $r = a$ y $dz = b d\theta$, con a y b constantes. La argolla se mueve sin roce sobre esta hélice, y está también sujeta a un potencial $V(r, z) = k(r^2 + z^2)/2$. En $t = 0$ la argolla se lanza con velocidad $\dot{z}|_{t=0} = v_0$ desde $z|_{t=0} = 0$. Encuentre la fuerza de constricción que actúa sobre la partícula como función del tiempo utilizando el método de multiplicadores de Lagrange.

III Teoría en Mecánica Analítica.

1. Enuncie el principio de d'Alembert y deduzca las ecuaciones de Lagrange.
2. Cuerpo rígido.

- a) Demuestre que la velocidad de un punto \vec{r}_o de un cuerpo rígido en un sistema inercial S_o se puede escribir

$$\vec{v}_o = \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r},$$

en \vec{V} es la velocidad del origen de un sistema S ligado al cuerpo, \vec{r} es la posición de \vec{r}_o en S , $\vec{\Omega}$ es el vector rotación angular.

- b) Demuestre que el momentum angular de un cuerpo rígido en un sistema inercial con origen en el centro de masa es

$$L_i = \sum_{\sigma=1}^N m_{\sigma} (\vec{r}_{\sigma} \wedge \vec{v}_{\sigma})|_i = I_{ik} \Omega_k,$$

donde I es el tensor de inercia.

- c) Escriba el Lagrangeano del cuerpo rígido usando I .
- d) Demuestre que para un vector \vec{A} cualquiera,

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\text{inercial}} = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\text{cuerpo}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{A},$$

y escriba las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido libre, en S_o , pero con cantidades definidas en un sistema ligado al cuerpo y cuyos ejes diagonalizan a I .