Vibraciones y Ondas

Simon Casassus Astronomía, Universidad de Chile
http://www.das.uchile.cl/∼simon

I Mecánica de Lagrange
II Pequeñas oscilaciones
III Ondas

Parte III

Ondas

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli

Solución de d'Alembert

Decomposición espectral

d'Alembert para extremos fijos

Ondas 3-D

Flujo de energía

Vector flujo de energía

Transmisión, reflección

Paquetes de ondas

Medios dispersivos

Paquetes de ondas

Fenómenos ondulatorios

Sonido

Ondas de superficie

Ondas electromagnéticas y ondículas

Difracción e interferencias

Plan

1. **Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli**
   - Solución de d'Alembert
   - Decomposición espectral
   - d'Alembert para extremos fijos
   - Ondas 3-D
2. **Flujo de energía**
   - Vector flujo de energía
   - Transmisión, reflección
3. **Paquetes de ondas**
   - Medios dispersivos
   - Paquetes de ondas
4. **Fenómenos ondulatorios**
   - Sonido
   - Ondas de superficie
   - Ondas electromagnéticas y ondículas
5. **Difracción e interferencias**

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

Plan

1. **Soluciones de d’Alembert y de Bernouilli**
   - Solución de d’Alembert
   - Decomposición espectral
   - d’Alembert para extremos fijos
   - Ondas 3-D
2. **Flujo de energía**
   - Vector flujo de energía
   - Transmisión, reflección
3. **Paquetes de ondas**
   - Medios dispersivos
   - Paquetes de ondas
4. **Fenómenos ondulatorios**
   - Sonido
   - Ondas de superficie
   - Ondas electromagnéticas y ondículas
5. **Difracción e interferencias**

1.1-Solución de d'Alembert

- Por sustitución, las soluciones de la ec. de ondas 1D se pueden escribir

$$u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct). \quad (1)$$

- Las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \\ \dot{u}(x,0) &= g(x). \end{aligned}$$

- La solución Ec. 1 se pueden adecuar a cualquier condición inicial f y g con

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(x')dx'. \quad (2)$$

- Notar caso $g = 0$: ec. de ondas da dos señales propagándose en sentido opuesto con mitad de amplitud original.

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

Plan

1. **Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli**
   - Solución de d'Alembert
   - Decomposición espectral
   - d'Alembert para extremos fijos
   - Ondas 3-D
2. **Flujo de energía**
   - Vector flujo de energía
   - Transmisión, reflección
3. **Paquetes de ondas**
   - Medios dispersivos
   - Paquetes de ondas
4. **Fenómenos ondulatorios**
   - Sonido
   - Ondas de superficie
   - Ondas electromagnéticas y ondículas
5. **Difracción e interferencias**

1.2-Decomposición espectral

- Consideremos una onda $f(x-ct)$ propagándose hacia $+x$.
- En S', con velocidad c respecto a S, hacemos descomposición de Fourier:

$$f(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} dk A(k) \exp(ikx').$$

- Entonces en S tenemos la descomposición espectral

$$f(x,t) = \int dk A(k) \underbrace{\exp(i[kx-\omega t])}_{\text{onda plana monocromática}} .$$

- Longitud de onda $\lambda = 2\pi/\omega$, período $\tau = 2\pi/\omega$.

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

Plan

1. **Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli**
   - Solución de d'Alembert
   - Decomposición espectral
   - d'Alembert para extremos fijos
   - Ondas 3-D
2. **Flujo de energía**
   - Vector flujo de energía
   - Transmisión, reflección
3. **Paquetes de ondas**
   - Medios dispersivos
   - Paquetes de ondas
4. **Fenómenos ondulatorios**
   - Sonido
   - Ondas de superficie
   - Ondas electromagnéticas y ondículas
5. **Difracción e interferencias**

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

1.3-d'Alembert para extremos fijos

- Condiciones iniciales: $u(x,0) = f(x)$, $\dot{u}(x,0) = g(x)$, con extremos fijos $u(0,t) = u(l,t) = 0$.
- Cuerda: $0 \leq x \leq l \;\Rightarrow$ necesitamos extender el dominio de f y $g(x \pm ct)$ para todo $\mathbb{R}$ porque $t \to \infty$.
- Requerimos $f(-x) = -f(x)$ y $g(-x) = -g(x)$ de manera que $f(0) = g(0) = 0$. Notar ondas viajando en sentido opuesto hacia 0.
- Tbién requerimos f y g impares en torno a $x = l$:

$$
\begin{aligned}
f(x) = &\quad f(l + (x - l)) = -f(l - (x - l)) &= f(x - 2l) \\
g(x) = &\quad g(l + (x - l)) = -g(l - (x - l)) &= g(x - 2l)
\end{aligned}
$$

- $\Rightarrow\;$ f y g deben ser impares y periódicas.

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

1.3-Equivalencia d'Alembert/Bernouilli para extremos fijos

- Bernouilli $\equiv$ modos normales, $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^n(x) \cos(\omega_n t + \phi_n)$, o bien

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_n \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\
&\quad \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)\right],
\end{aligned}
$$

  donde, $a_n = C_n \cos(\phi_n)$, $b_n = -C_n \sin(\phi_n)$.
- Expandimos d'Alembert para extremos fijos, y usamos $\int_0^l \rho_n(x)\rho_m(x)\sigma dx = \delta_{nm}$:

$$
f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),
$$

$$
\text{con} \quad A_n = \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x'}{l}\right) f(x')\sigma dx' \qquad (3)
$$

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

1.3-d'Alembert para extremos fijos

- De la misma manera para g,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

$$\text{con} \quad B_n = \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x'}{l}\right) g(x')\sigma dx' \quad (4)$$

- Vemos que las expansiones de f y g en modos normales (i.e. serie de Fourier) son impares y periódicas con período $2l$.
- Sustituyendo f y g en la solución de d'Alembert, recuperamos

$$u(x,t) = \sum_n \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)\right],$$

con $a_n \equiv A_n$ y $B_n = n\pi c b_n / l$.

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

Plan

1. **Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli**
   - Solución de d'Alembert
   - Decomposición espectral
   - d'Alembert para extremos fijos
   - Ondas 3-D
2. **Flujo de energía**
   - Vector flujo de energía
   - Transmisión, reflección
3. **Paquetes de ondas**
   - Medios dispersivos
   - Paquetes de ondas
4. **Fenómenos ondulatorios**
   - Sonido
   - Ondas de superficie
   - Ondas electromagnéticas y ondículas
5. **Difracción e interferencias**

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
- Solución de d'Alembert
- Decomposición espectral
- d'Alembert para extremos fijos
- Ondas 3-D

Flujo de energía
- Vector flujo de energía
- Transmisión, reflección

Paquetes de ondas
- Medios dispersivos
- Paquetes de ondas

Fenómenos ondulatorios
- Sonido
- Ondas de superficie
- Ondas electromagnéticas y ondículas

Difracción e interferencias

1.4-Ondas 3-D

- En 3-D,

$$\nabla^2\psi(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0.$$

- d'Alembert: $\psi = \psi(\vec{x}\cdot\hat{c} \pm ct) \;\Rightarrow$ Onda plana.
- Decomposición espectral:

$$\psi(\vec{r},t) = \int d^3k A(\vec{k}) \exp\left[i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\right].$$

- Ondas esféricas: busquemos soluciones $\psi(\vec{r},t) = f(r,t)$. En coordenadas esféricas,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Solución: $\boxed{f = h(r \pm ct)/r}$.

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

Plan

1. **Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli**
   - Solución de d'Alembert
   - Decomposición espectral
   - d'Alembert para extremos fijos
   - Ondas 3-D
2. **Flujo de energía**
   - Vector flujo de energía
   - Transmisión, reflección
3. **Paquetes de ondas**
   - Medios dispersivos
   - Paquetes de ondas
4. **Fenómenos ondulatorios**
   - Sonido
   - Ondas de superficie
   - Ondas electromagnéticas y ondículas
5. **Difracción e interferencias**

Plan

1. **Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli**
   - Solución de d'Alembert
   - Decomposición espectral
   - d'Alembert para extremos fijos
   - Ondas 3-D
2. **Flujo de energía**
   - Vector flujo de energía
   - Transmisión, reflección
3. **Paquetes de ondas**
   - Medios dispersivos
   - Paquetes de ondas
4. **Fenómenos ondulatorios**
   - Sonido
   - Ondas de superficie
   - Ondas electromagnéticas y ondículas
5. **Difracción e interferencias**

Densidad Hamiltoniana y momentum canónico

- Del ppio de mínima acción,

$$\delta S = 0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t1}^{t2} dt \int_0^l dx \mathcal{L}(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}; x, t) = 0,$$

llegamos a las ecuaciones de Euler-Lagrange para medios continuos (i.e. la ecuación de ondas),

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial t)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u/\partial x)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0. \tag{5}$$

- La densidad Hamiltoniana es

$$\mathcal{H} = \mathcal{P} \frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{L}, \text{con } \mathcal{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial t}}, \tag{6}$$

donde $\mathcal{P}$ es el momentum canónico.

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

Vector flujo de energía

- Usando Ec. 5 calculamos la variación de la densidad de energía ($\equiv$ densidad Hamiltoniana si $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$),

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} \frac{\partial u}{\partial t}\right],$$

  cuando $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$, es decir cuando T y V no dependen explícitamente de t.

- En 3-D, lleguaríamos a

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0, \tag{7}$$

  donde $S_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial x_i}} \frac{\partial u}{\partial t}$ es el vector flujo de energía.

- Integrando en un volumen V, vemos que Ec. 7 constituye una ecuación de continuidad para la energía asociada a una onda.

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
- Solución de d'Alembert
- Decomposición espectral
- d'Alembert para extremos fijos
- Ondas 3-D

Flujo de energía
- Vector flujo de energía
- Transmisión, reflección

Paquetes de ondas
- Medios dispersivos
- Paquetes de ondas

Fenómenos ondulatorios
- Sonido
- Ondas de superficie
- Ondas electromagnéticas y ondículas

Difracción e interferencias

Ejemplo: cuerda

- Para la cuerda,

$$\mathcal{L} = \frac{\sigma}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \text{ y}$$

$$\mathcal{H} = \frac{\sigma}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

- De Eqs. 6 y 7 tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \sigma(x)\frac{\partial u}{\partial x}, \text{ y} \\ \vec{S} &= -\tau(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\hat{x}. \end{aligned}$$

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

Ejemplo: onda monocromática en una cuerda

- Calculemos el flujo de energía asociado a una onda monocromática, $u(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$:

$$S = A^2(\tau k^2 c)\sin^2(kx - \omega t), \text{ y en promedio temporal,}$$

$$\langle S\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T S dt = \frac{1}{2}A^2(\tau k^2 c) = \frac{1}{2}A^2\sigma c\omega^2.$$

- Además tenemos la densidad de energía

$$\mathcal{H} = A^2\tau k^2 \sin^2(kx - \omega t).$$

- Vemos entonces que para una onda monocromática

$$\boxed{S = \mathcal{H}c}.$$

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli

Solución de d'Alembert

Decomposición espectral

d'Alembert para extremos fijos

Ondas 3-D

Flujo de energía

Vector flujo de energía

Transmisión, reflección

Paquetes de ondas

Medios dispersivos

Paquetes de ondas

Fenómenos ondulatorios

Sonido

Ondas de superficie

Ondas electromagnéticas y ondículas

Difracción e interferencias

Plan

1. **Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli**
   - Solución de d'Alembert
   - Decomposición espectral
   - d'Alembert para extremos fijos
   - Ondas 3-D
2. **Flujo de energía**
   - Vector flujo de energía
   - Transmisión, reflección
3. **Paquetes de ondas**
   - Medios dispersivos
   - Paquetes de ondas
4. **Fenómenos ondulatorios**
   - Sonido
   - Ondas de superficie
   - Ondas electromagnéticas y ondículas
5. **Difracción e interferencias**

2.2-Transmisión, reflección

- Cuando una onda $u_i(\vec{x}, t)$ incide en una discontinuidad del medio en el cual se propaga, existe una onda reflejada $u_r(\vec{x}, t)$, y una onda transmitida, $u_t(\vec{x}, t)$.
- El coeficiente de transmisión se define

$$T = \frac{S_t}{S_i},$$

y el coeficiente de reflección es

$$R = \frac{S_r}{S_i}.$$

- Para el ejemplo de una onda en una cuerda incidente en una discontinuidad de $\sigma(x)$ (tarea),

$$R = \left[\frac{\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}}\right]^2 \text{ y } T = \frac{4\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}{\left[\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2}\right]^2}$$

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

Plan

1. **Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli**
   - Solución de d'Alembert
   - Decomposición espectral
   - d'Alembert para extremos fijos
   - Ondas 3-D
2. **Flujo de energía**
   - Vector flujo de energía
   - Transmisión, reflección
3. **Paquetes de ondas**
   - Medios dispersivos
   - Paquetes de ondas
4. **Fenómenos ondulatorios**
   - Sonido
   - Ondas de superficie
   - Ondas electromagnéticas y ondículas
5. **Difracción e interferencias**

Plan

1. **Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli**
   - Solución de d'Alembert
   - Decomposición espectral
   - d'Alembert para extremos fijos
   - Ondas 3-D
2. **Flujo de energía**
   - Vector flujo de energía
   - Transmisión, reflección
3. **Paquetes de ondas**
   - Medios dispersivos
   - Paquetes de ondas
4. **Fenómenos ondulatorios**
   - Sonido
   - Ondas de superficie
   - Ondas electromagnéticas y ondículas
5. **Difracción e interferencias**

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

Naturaleza discreta (cuántica) de la materia

- Cuando λ es comparable con la distancia a entre las partículas discretas que componen un medio continuo de dimensión $L \gg a$, la aproximación de continuo falla y hay que recurrir a una descripción discreta.
- Por ejemplo para la cuerda con masas, cuando $\lambda \sim a$, en que a es la distancia entre las masas, teníamos

$$\omega^2 = \frac{4\tau}{ma} \sin^2(ka/2),$$

  y cuando $\lambda \gg a$ recuperamos $\omega^2 \to \frac{\tau}{\sigma} k^2$.
- Definimos la velocidad de fase $\boxed{c_f \equiv \omega/k}$. Para una cuerda ideal, en el límite continuo la velocidad de propagación $c_f = c$ es constante, independiente de ω.
- Pero cuando $k \to \infty$,

$$c_f = \sqrt{\frac{4\tau}{mak^2} \sin^2(ka/2)},$$

  y vemos que ondas con mayor k se propagan más lento.

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

Roce

- Consideremos una cuerda en un medio viscoso, de manera que exista una fuerza de roce opuesta al desplazamiento transversal.
- A 1er orden en la fuerza de roce, incluimos la fuerza de roce aplicada a un elto de cuerda dx:

$$f_r = -dx\chi\frac{\partial u}{\partial t}.$$

- Un balance de fuerzas sobre un elemento dx da una ecuación de ondas modificada,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\chi}{\tau}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \text{ con } c = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}.$$

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

Roce

- Consideremos la propagación de una onda monocromática en un medio con roce. Ponemos $u(x,t) = A\exp[i(kx - \omega t)]$, y vemos que la relación de dispersión

$$\frac{\omega^2}{c^2} + i\frac{\chi\omega}{\tau} - k^2 = 0 \text{ es compleja.}$$

- $\Rightarrow\ k \in \mathbb{C},\ k = k_R + ik_I$.
- De la relación de dispersión,

$$k^I_\pm = -\chi\omega/(2\tau k^R_\pm),$$

$$k^R_\pm = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2}{c^2} \pm \sqrt{\frac{\omega^4}{c^4} + \left(\frac{\chi\omega}{c}\right)^2}\right).$$

- Entonces las soluciones de la ecuación de ondas disipativa tienen la forma

$$u = Ae^{-k^I x}e^{i(k^R x - \omega t)}.$$

- Si el medio disipativo esta confinado en $x > 0$, es necesario que $k^I > 0$ para evitar divergencia.

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

Plan

1. **Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli**
   - Solución de d'Alembert
   - Decomposición espectral
   - d'Alembert para extremos fijos
   - Ondas 3-D
2. **Flujo de energía**
   - Vector flujo de energía
   - Transmisión, reflección
3. **Paquetes de ondas**
   - Medios dispersivos
   - Paquetes de ondas
4. **Fenómenos ondulatorios**
   - Sonido
   - Ondas de superficie
   - Ondas electromagnéticas y ondículas
5. **Difracción e interferencias**

3.2-Paquetes de ondas

- La decomposición espectral de una señal es

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)\exp[i(kx-\omega t)]dk,$$

  en que $A(k)$ es el 'espectro' de u , y tbien es la transformada de Fourier en $t=0$.
- Queremos estudiar la propagación de la onda en un medio dispersivo, para $t>0$.
- Si partimos con un espectro $A(k)$ muy angosto en torno a $k_\circ$,

$$\omega(k) = \omega_\circ + (k-k_\circ)\left.\frac{\partial\omega}{\partial k}\right|_{k_\circ}.$$

- Introduciendo $l \equiv k - k_\circ$,

$$u(x,t) = \exp[i(k_\circ x - \omega_\circ t)]\overbrace{\int dl A(l+k_\circ)\exp[il(x-v_g t)]}^{\text{envoltura se propaga con velocidad } v_g},$$

con $\boxed{v_g \equiv \partial\omega/\partial k|_{k_\circ}}$.

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

3.2-Paquetes de ondas

- Entonces vemos que, modulo un factor harmónico (exponencial oscilante),

$$u(x,t) \sim f(x - v_g t),$$

y la señal se propaga con velocidad v_g. Notamos que las ondas monocromáticas, i.e. una sola componente espectral, no pueden transmitir información porque tienen dominio infinito.

- Para el caso de un espectro Gaussiano en $t = 0$,

$$A(k) = \exp(-\alpha^2 (k - k_\circ)^2),$$

$$\Rightarrow \text{ (tarea) } u(x, t = 0) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} e^{ik_\circ x} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}},$$

y $\boxed{\sigma(u)\sigma(A) = 1}$, donde σ es la dispersión cuadrática media.

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

Plan

1 Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D

2 Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección

3 Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas

4 Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas

5 Difracción e interferencias

4-Fenómenos ondulatorios

- Sonido.
- Ondas de superficie.
- Ondas electromagnéticas.
- Ondas de materia - ondículas.

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli

Solución de d'Alembert

Decomposición espectral

d'Alembert para extremos fijos

Ondas 3-D

Flujo de energía

Vector flujo de energía

Transmisión, reflección

Paquetes de ondas

Medios dispersivos

Paquetes de ondas

Fenómenos ondulatorios

Sonido

Ondas de superficie

Ondas electromagnéticas y ondículas

Difracción e interferencias

Plan

1. **Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli**
   - Solución de d'Alembert
   - Decomposición espectral
   - d'Alembert para extremos fijos
   - Ondas 3-D
2. **Flujo de energía**
   - Vector flujo de energía
   - Transmisión, reflección
3. **Paquetes de ondas**
   - Medios dispersivos
   - Paquetes de ondas
4. **Fenómenos ondulatorios**
   - Sonido
   - Ondas de superficie
   - Ondas electromagnéticas y ondículas
5. **Difracción e interferencias**

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

4.1-Sonido

- Sonido: señal de presión en oído, $P_e(t)$, tal que $P = P_\circ + P_e$, y con intensidad medida en dB,

$$\frac{I}{\text{dB}} = 20 \log(P_e/P_{\text{ref}}), \text{ con } P_{\text{ref}} = 2\ 10^{-5}\ \mathrm{N\ m^{-2}}.$$

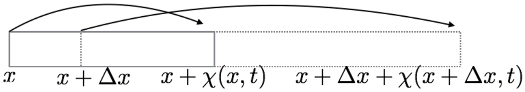
- Umbral de audibilidad: $I = 0$ dB. Umbral del dolor: $I = 130$ dB. Conversación: $I = 40$ dB. Turbina de avión, martillo neumático: $I = 120$ dB.
- Vemos que $P_e \ll P_\circ \sim 10^5\ \mathrm{N\ m^{-2}} = 1\ \mathrm{bar}$.
- Existe una ecuación de estado que liga $P = f(n, T)$, por ejemplo $P = nkT$. Con suposiciones adicionales sobre T, que particularizan el proceso termodinámico, se puede escribir una relación 1 a 1 $P = f(n)$.
- $\Rightarrow \; P_\circ + P_e = f(n_\circ + n_e) = f(n_\circ) + n_e f'(n_\circ)$.
- $\Rightarrow$

$$P_e = \kappa n_e, \tag{8}$$

con $\kappa = f'(n_\circ) = \left.\frac{\partial P}{\partial n}\right|_{n=n_\circ}$.

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

4.1-Sonido



- En una onda de sonido, la variación de presión $P(t)$ induce un desplazamiento lineal $\chi(x, t)$, tal que aire en la posición x oscila en torno a x con un desplazamiento χ.
- La masa de aire en un volumen elemental $\Delta V = A\Delta x$ es conservada:

$$n_\circ \Delta x = n(x, t)(x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t) - x - \chi(x, t)).$$

- Para $\Delta x \to 0$, $n_\circ = (n_\circ + n_e)\left(\frac{\partial \chi}{\partial x} + 1\right)$,
- Y con $n_e \ll n_\circ$, tenemos una relación entre n_e y χ:

$$n_e \approx -n_\circ \frac{\partial \chi}{\partial x}. \qquad (9)$$

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

4.1-Sonido

- La segunda ley de Newton aplicada a un elemento de volumen es:

$$mn_\circ A \Delta x \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \left[P(x,t) - P(x+\Delta x, t)\right] A \approx -\frac{\partial P_e}{\partial x} \Delta x A.$$

- Con la relación entre P_e y n_e, Ec. 8, y con Ec. 9,

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \frac{\kappa}{m_e} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$$

- $\chi(x,t)$ satisface la Ec. de ondas, con $\boxed{c_s = \sqrt{\kappa/m} = \sqrt{\partial P/\partial \rho}}$.
- Además de Ec. 9, vemos que n_e y P_e (de Ec. 8), también cumplen ec. de ondas.

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

4.1-Sonido

- Newton: Sonido isothermal con T constante $\Rightarrow$ difusión aplana las perturbaciones de densidad. A pesar de la imposibilidad del sonido isotermal, pongamos $P = nkT \;\Rightarrow$

$$c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{kT}{m}.$$

- En el caso isotermal, $c_s \approx 290$ m s-1, lo cual es cercano pero inferior al observado ≈ 330 m s^{-1}.

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

4.1-Sonido

- Laplace: longitud de onda sonido es $\gg$ libre camino medio, $\lambda_s \approx 1\ \mathrm{m} \gg l = 1/(n\sigma) \approx 10^{-7}\ \mathrm{m}$.
- Perturbaciones adiabáticas, sin difusión $\Rightarrow\ PV^\gamma = \mathrm{Cte} \quad \Leftrightarrow P = \left(\frac{mN}{V}\right)^\gamma = \mathrm{Cte}$,
- $\Rightarrow P = \mathrm{Cte}\rho^\gamma$, y

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{\gamma P}{\rho} = c_s^2.$$

- Usando $PV = NkT$,

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma kT}{m}}. \tag{10}$$

- Del teorema de equipartición, vemos que $c_s \approx \sqrt{\langle v^2 \rangle}$.
- Para un gas ideal monoatómico, $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5/2}{3/2}$, mientras que para un gas ideal diatómico $\gamma \approx 7/5$.
- El factor $\sqrt{\gamma}$ lleva a acuerdo con las observaciones.

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli

Solución de d'Alembert

Decomposición espectral

d'Alembert para extremos fijos

Ondas 3-D

Flujo de energía

Vector flujo de energía

Transmisión, reflección

Paquetes de ondas

Medios dispersivos

Paquetes de ondas

Fenómenos ondulatorios

Sonido

Ondas de superficie

Ondas electromagnéticas y ondículas

Difracción e interferencias

4.1-Sonido: ejemplos

- Efecto Doppler.
- Modos normales de la zampoña.

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli

Solución de d'Alembert

Decomposición espectral

d'Alembert para extremos fijos

Ondas 3-D

Flujo de energía

Vector flujo de energía

Transmisión, reflección

Paquetes de ondas

Medios dispersivos

Paquetes de ondas

Fenómenos ondulatorios

Sonido

Ondas de superficie

Ondas electromagnéticas y ondículas

Difracción e interferencias

Plan

1 Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
- Solución de d'Alembert
- Decomposición espectral
- d'Alembert para extremos fijos
- Ondas 3-D

2 Flujo de energía
- Vector flujo de energía
- Transmisión, reflección

3 Paquetes de ondas
- Medios dispersivos
- Paquetes de ondas

4 Fenómenos ondulatorios
- Sonido
- Ondas de superficie
- Ondas electromagnéticas y ondículas

5 Difracción e interferencias

4.2-Ondas de superficie

- Sea $\zeta(x, t)$ el desplazamiento del equilibrio de la superficie de agua en un estanque con profundidad h. Estudiaremos el caso $h \ll \lambda$.
- Consideremos el desplazamiento vertical de un volumen $\delta\mathcal{V}$:

$$\rho\delta\mathcal{V}\frac{d^2 z}{dt^2} = f_z + \delta A P(z) - \delta A P(z + dz), \text{ con } \delta\mathcal{V} = \delta A \delta z.$$

$$\Rightarrow \ \rho\frac{dv_z}{dt} = f_z - \frac{\partial P}{\partial z}, \tag{11}$$

o en general,

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \vec{\nabla} P. \tag{12}$$

- Hipótesis por verificar y cuantificar: $\frac{dv_z}{dt} \sim 0$.

$$\Rightarrow -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = 0, \text{ y}$$

$$P(x, z) = P_\circ + \rho g(\zeta(x, t) - z). \tag{13}$$

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

- Notemos ahora que a primer orden en v_z, $\frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t}$:

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\frac{dz}{dt}}_{\mathrm{O}(v_z^2)}.$$

- Del equivalente a Ec. 12 en x:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}. \qquad (14)$$

- Usando Ec. 13,

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x}. \qquad (15)$$

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

4.2-Ondas de superficie

- Para fijar ideas, consideremos un canal con ancho b segun $\hat{y}$.
- Conservación de masa en el volumen $d\mathcal{V} = hbdx$, con borde $\delta\mathcal{S}$:

$$\underbrace{\int_{\delta\mathcal{S}} -\rho\vec{v}\cdot d\vec{A}}_{-\rho[(h+\zeta)bv_x]|_{x+\delta x}+\rho[(h+\zeta)bv_x]|_x} = \underbrace{\frac{d}{dt}\int_{d\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V}}_{\frac{\partial}{\partial t}(\rho[h+\zeta]b\delta x)},$$

$$\Rightarrow -\rho hb\delta x\frac{\partial v_x}{\partial x} = \rho b\delta x\frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

- Tenemos entonces, de la conservación de masa,

$$-h\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \qquad (16)$$

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

4.2-Ondas de superficie

- Combinando Ec. 15 (Euler), y Ec. 16 (continuidad), llegamos una ecuación de ondas en $\zeta(x, t)$:

$$gh\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \implies c = \sqrt{gh}.$$

- Tenemos el resultado interesante que la señales se propagan más rápido a mayor profundidad h.
- $\Rightarrow$ en una evolución no lineal, como en una ola, la cresta de la ola se propaga mas rápido, y se quiebra la ola.

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

4.2-Ondas de superficie

- Verifiquemos ahora la hipótesis $\frac{dv_z}{dt} \sim 0$ cuando $h \ll \lambda$.
- Busquemos soluciones en modos normales en un estanque de largo l, y con $v_x = 0$ en los bordes.
- Usando Ec. 15, $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$ en los bordes.
- Los modos son

$$\zeta^n(x,t) = u_n(x)\ \cos(\omega_n t + \phi_n),$$

$$\text{con } u_n(x) = \frac{2}{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right),\ n = 1, 2, 3, \cdots, \infty.$$

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli

Solución de d'Alembert

Decomposición espectral

d'Alembert para extremos fijos

Ondas 3-D

Flujo de energía

Vector flujo de energía

Transmisión, reflección

Paquetes de ondas

Medios dispersivos

Paquetes de ondas

Fenómenos ondulatorios

Sonido

Ondas de superficie

Ondas electromagnéticas y ondículas

Difracción e interferencias

4.2-Ondas de superficie

- De Ec. 15, la velocidad es

$$v_x^n(x,t) = \frac{c}{h}\sin(k_n x)\sin(k_n c t + \phi_n).$$

- Con $v_z = \frac{\partial\zeta}{\partial t}$ en la superficie, donde v_z es máxima ($v_z = 0$ en el fondo), podemos estimar

$$\frac{1}{g}\frac{dv_z}{dt} \approx \frac{1}{g}\frac{\partial v_z}{\partial t} \approx \frac{k_n^2 c^2 \zeta_n}{g},$$

con $\zeta_n \ll h$, y $c^2 = gh$,

$$\frac{1}{g}\frac{\partial v_z}{\partial t} \ll \left(\frac{2\pi h}{\lambda_n}\right)^2,$$

entonces vemos que $\frac{\partial v_z}{\partial t}$ es despreciable (ante g) si $h \ll \lambda$.

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

- A.N.: $c = \sqrt{gh} \sim 0{,}2$ km s^{-1} = 800 km/h para $h = 5$ km. Esta es la velocidad de propagación para tsunamis con $\lambda \gg 5$ km.

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

Plan

1 **Soluciones de d’Alembert y de Bernouilli**
- Solución de d’Alembert
- Decomposición espectral
- d’Alembert para extremos fijos
- Ondas 3-D

2 **Flujo de energía**
- Vector flujo de energía
- Transmisión, reflección

3 **Paquetes de ondas**
- Medios dispersivos
- Paquetes de ondas

4 **Fenómenos ondulatorios**
- Sonido
- Ondas de superficie
- Ondas electromagnéticas y ondículas

5 **Difracción e interferencias**

Soluciones de d’Alembert y de Bernouilli
- Solución de d’Alembert
- Decomposición espectral
- d’Alembert para extremos fijos
- Ondas 3-D

Flujo de energía
- Vector flujo de energía
- Transmisión, reflección

Paquetes de ondas
- Medios dispersivos
- Paquetes de ondas

Fenómenos ondulatorios
- Sonido
- Ondas de superficie
- Ondas electromagnéticas y ondículas

Difracción e interferencias

4.3- Ondas electromagnéticas

- Ecuaciones de Maxwell $\Rightarrow$ campos $(\vec{E}, \vec{B})$ satisfacen ecuación de ondas:

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon\epsilon_\circ \mu\mu_\circ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

  $\Rightarrow c = c_\circ / n$, donde $c_\circ$ es la velocidad de la luz en el vacío, y n es el *índice de refracción*.

- Analogía con ondas mecánicas sugiere que señal $(\vec{E}, \vec{B})$ se propaga en un medio, el “ether”.

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

4.3- Ondas electromagnéticas

- La densidad de energía asociada a señal $(\vec{E}, \vec{B})$ es

$$u = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B},$$

$$\text{con } \vec{B} = \mu\mu_\circ\vec{H} \text{ y } \vec{D} = \epsilon\epsilon_\circ\vec{E}.$$

- Conservación de energía (ec. de continuidad):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = -\vec{j}_l\cdot\vec{E}, \text{ con } \boxed{\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}} \textbf{ vector de Poynting}. \tag{17}$$

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli

Solución de d'Alembert

Decomposición espectral

d'Alembert para extremos fijos

Ondas 3-D

Flujo de energía

Vector flujo de energía

Transmisión, reflección

Paquetes de ondas

Medios dispersivos

Paquetes de ondas

Fenómenos ondulatorios

Sonido

Ondas de superficie

Ondas electromagnéticas y ondículas

Difracción e interferencias

Relación entre $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en ondas planas

$$\vec{E}\begin{pmatrix} 0 \\ f(x-ct)+g(x+ct) \\ F(x-ct)+G(x+ct) \end{pmatrix} \Rightarrow \; c\vec{B}\begin{pmatrix} 0 \\ -F(x-ct)+G(x+ct) \\ f(x-ct)+g(x+ct) \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \vec{E} \perp \vec{B} \perp \hat{k}$$

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

u y vector de Poynting para una onda plana electromagnética

$$\vec{S} = \epsilon_\circ c^2 \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H}, \;\; \text{y} \;\; u = \frac{1}{2}\epsilon_\circ |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2}\epsilon_\circ c^2 |\vec{B}|^2$$

$$\longrightarrow u = \epsilon_\circ E^2 \text{ y } \vec{S} = uc\hat{k}$$

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli

Solución de d'Alembert

Decomposición espectral

d'Alembert para extremos fijos

Ondas 3-D

Flujo de energía

Vector flujo de energía

Transmisión, reflección

Paquetes de ondas

Medios dispersivos

Paquetes de ondas

Fenómenos ondulatorios

Sonido

Ondas de superficie

Ondas electromagnéticas y ondículas

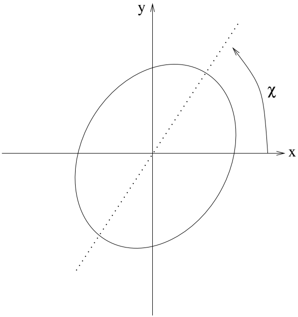
Difracción e interferencias

Polarización

Para una “Onda Plana Monocromática” (OPM),

$$\mathrm{Re}\left[\vec{E}_k\right] = \mathrm{Re}\left[\hat{x}\epsilon_x e^{i\phi_x}\exp\left(i(kx-\omega t)\right) + \hat{y}\epsilon_y e^{i\phi_y}\exp\left(i(kx-\omega t)\right)\right]$$

- Polarización lineal: $\phi_y - \phi_x = 0$.
- Polarizacióh circular: $|\phi_y - \phi_x| = \frac{\pi}{2}$ y $\epsilon_y = \epsilon_x$.
- El caso general es elíptico, con $\tan(\chi) = \frac{\epsilon_x}{\epsilon_y}\frac{\cos(\phi_x)}{\cos(\phi_y)}$.



Soluciones de d’Alembert y de Bernouilli
Solución de d’Alembert
Decomposición espectral
d’Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

Radiación electromagnética

- Potencial vector $B \equiv \vec{\nabla} \otimes \vec{A}$.
- Approximación dipolar: lejos de una distribución de cargas con densisad de corriente $\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)\vec{v}(\vec{r}, t)$,

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_\circ}{4\pi r_1} \int d^3 r_2 \vec{j}(\vec{r}_e, t - r_1/c) = \frac{\mu_\circ}{4\pi r_1} \sum_a q_a \vec{v}_a(t - r_1/c).$$

- Introduciendo el dipolo eléctrico $\vec{d} = \sum_a q_a \vec{v}_a$,

$$\vec{A} = \frac{\mu_\circ}{4\pi r_1} \dot{vecd}(t - r_1/c) \sim \underbrace{\frac{\vec{\psi}(t - r_1/c)}{r_1}}_{\textbf{onda esférica}}.$$

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

Radiación dipolar

- Cálculo de $\vec{E}, \vec{B}$:

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \vec{\nabla} \otimes \vec{A}, \\
\vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \textit{Gauge} \text{ de Lorentz.}
\end{aligned}$$

- $\cdots \Longrightarrow$:

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{\mu_\circ}{4\pi c r}\ddot{\vec{d}} \otimes \hat{r}, \\
\vec{E} &= c\vec{B} \otimes \hat{r} - \vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},
\end{aligned}$$

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

Fórmula de Larmor para radiación dipolar

- Cálculo de $\vec{S}$:

$$\vec{S} = \epsilon_\circ c \left(\frac{\mu_\circ}{4\pi r} \ddot{\vec{d}} \right)^2 \sin^2(\theta) \hat{r},$$

donde θ es el ángulo entre $\hat{r}$ y $\vec{d}$.

- Integrando la potencia emitida en todas direcciones,

$$P = \int_{4\pi} \vec{S} \cdot \hat{r} \; r^2 d\Omega = \frac{\mu_\circ}{6\pi c} \left(\ddot{d} \right)^2 ,$$

Fórmula de Larmor.

- Notar caso de una antena, con $d = LQ$,y $I = \dot{Q} = \mathrm{Re}\left[I_\circ e^{i\omega t} \right]$.

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli

Solución de d'Alembert

Decomposición espectral

d'Alembert para extremos fijos

Ondas 3-D

Flujo de energía

Vector flujo de energía

Transmisión, reflección

Paquetes de ondas

Medios dispersivos

Paquetes de ondas

Fenómenos ondulatorios

Sonido

Ondas de superficie

Ondas electromagnéticas y ondículas

Difracción e interferencias

4.3- Ondículas

- Experimento de Michelson en $\sim$1900 demuestra inexistencia del “ether”.
- Cuantización de la energía electromagnética (cuerpo negro, Planck 1900) + efecto fotoléctrico (Einstein 1905) $\Rightarrow$ señal $(\vec{E}, \vec{B})$ es transportada por partículas sin masa, llamadas ‘fotones’:

  energía $E = h\nu$.
  momentum $p = h/\lambda$.
- Con partículas el *Ether* como medio de propagación ya no es necesario, señal $(\vec{E}, \vec{B})$ es una onda en la densidad de energía $\Rightarrow$ densidad de fotones.

Soluciones de d’Alembert y de Bernouilli
Solución de d’Alembert
Decomposición espectral
d’Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

4.3- Ondículas

- Electrones se comportan a veces como ondas (son difractados por obstáculos, demostrad o experimentalmente en 1927), a veces como partículas (carga elemental de Millikan, 1910).
- Louis de Broglie propone extender concepto de 'ondículas' a materia: asociamos una longitud de onda al momentum, con $p = h/\lambda = \hbar k$, y energía cinética + potencial $E = h\nu = \hbar\omega$.
- Continuidad de la 'función de onda' $\Rightarrow$ circunferencias en órbitas electrónicas deben ser múltiplos de $\lambda \Rightarrow$ Explicación de los postulados de Bohr.
- Schrödinger y la mecánica ondulatoria: la amplitud de la función de onda electrónica $\psi(\vec{r}, t)$ (o para cualquier partícula) da la densidad de carga:

$$\rho = \psi\psi^*.$$

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

4.3- Mecánica ondulatoria

- Para una partícula con masa, no relativista ($v \ll c$, la energía total (o sea cinética + potencial) es $E = \frac{p^2}{2m} + V$.
- Notamos que para una OPM $\psi(\vec{r}, t) \propto \exp[i(\vec{k}.\vec{r} - \omega t]$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega\psi &= -i\frac{E}{\hbar}\psi, \text{ y} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2\psi &= -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi. \end{aligned}$$

- Escribiendo $\frac{p^2}{2m}\psi + V\psi = E\psi$, llegamos a la ecuación de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
Solución de d'Alembert
Decomposición espectral
d'Alembert para extremos fijos
Ondas 3-D
Flujo de energía
Vector flujo de energía
Transmisión, reflección
Paquetes de ondas
Medios dispersivos
Paquetes de ondas
Fenómenos ondulatorios
Sonido
Ondas de superficie
Ondas electromagnéticas y ondículas
Difracción e interferencias

Plan

1 Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
- Solución de d'Alembert
- Decomposición espectral
- d'Alembert para extremos fijos
- Ondas 3-D

2 Flujo de energía
- Vector flujo de energía
- Transmisión, reflección

3 Paquetes de ondas
- Medios dispersivos
- Paquetes de ondas

4 Fenómenos ondulatorios
- Sonido
- Ondas de superficie
- Ondas electromagnéticas y ondículas

5 **Difracción e interferencias**

5-Difracción e interferencias

- En general la potencia que lleva una onda plana que viaja con velocidad c, esta dada por el vector flujo de energía (Poynting), $S \propto uc$, donde u es la densidad de energía, $u \propto |\psi|^2$.

Soluciones de d'Alembert y de Bernouilli
- Solución de d'Alembert
- Decomposición espectral
- d'Alembert para extremos fijos
- Ondas 3-D

Flujo de energía
- Vector flujo de energía
- Transmisión, reflección

Paquetes de ondas
- Medios dispersivos
- Paquetes de ondas

Fenómenos ondulatorios
- Sonido
- Ondas de superficie
- Ondas electromagnéticas y ondículas

Difracción e interferencias