.1

Parte I
Mecánica de Lagrange

Índice

1. Coordenadas generalizadas

1.1. Constricciones y coordenadas generalizadas

Sistemas constreñidos y fuerzas de reacción.

- Sistema de N partículas: $3N$ grados de libertad $\{x_i\}_{i=1}^{n=3N}$, 3 direcciones de translación por partícula: $i = (1,2,3,),(4,5,6),\cdots,(n-2,n-1,n)$.
- En presencia de constricciones el # de grados de libertad es reducido por fuerzas de reacción:

$$\dot{p}_i = F_i^a + R_i, \; i = 1,\cdots,3N,$$

con p_i i-esima componente momentum (según x_i), F_i^a fuerza aplicada y R_i fuerza de reacción. .3

Constricciones holonómicas

- Constricciones holonómicas: se pueden escribir como k ecuaciones,

$$f_j(x_1, \cdots ., x_n, t) = c_j,\ j = 1, 2, \cdots, k.$$

- Ejemplos: partícula constreñida a una superficie 2-D $z = f(x, y)$, o a una curva $\vec{x} = \vec{f}(s)$, doble péndulo planar con largos fijos (dos grados de libertad, θ_1, θ_2).

.4

Constricciones no-holonómicas

- No hay ecuación ligando los $\{x_i\}$. Ejemplo: partícula que resbala en el campo $\vec{g}$ sobre una esfera, $r \geq R$.
- Dentro de las constricciones no-holonómicas estan las constricciones no-integrables:

$$\sum_i h_i dx_i = 0.$$

Ejemplo: cilíndro que rueda sin resbalar.

.5

Coordenadas generalizadas

- Consideremos N partículas con k constricciones holonómicas: hay $3N - k$ grados de libertad. Elegimos $\{q_i\}_{i=1}^{3N-k}$ coordenadas *independientes* que caracterisan el sistema. $\{q_i\}_{i=1}^{3N-k} \equiv$ coordenadas generalizadas.
- Ejemplos: s en $\vec{x} = \vec{f}(s)$, θ_1, θ_2 en el doble péndulo planar.
- Hay que especificar el tiempo en el caso de constricciones holonómicas tiempo-dependientes.
- Relación con coordinadas cartesianas:

$$x_i = x_i(q_1, \cdots, q_{n-k}, t),\ i = 1, \cdots, 3N.$$

.6

Estado mecánico.

- Los $\{q_j\}_{j=1}^{3N-k}$ son variables independientes que determinan la posición de un sistema. Pero los $\{q_j\}_{j=1}^{3N-k}$ no bastan para determinar el **estado mecánico** del sistema, porque para determinar la posición en un instante siguiente se necesitan las velocidades $\{\dot{q}_j\}_{j=1}^{3N-k}$.
- La experiencia indica que dados $\{q_j\}_{j=1}^{3N-k}$ y $\{\dot{q}_j\}_{j=1}^{3N-k}$, en t, queda determinado el estado mecánico, lo cual en principio permite predecir el movimiento futuro, suponiendo que se puede resolver el problema mecánico.
- En otras palabras, dados $\{q_j\}_{j=1}^{3N-k}$ y $\{\dot{q}_j\}_{j=1}^{3N-k}$ quedan determinados $\{\ddot{q}_j\}_{j=1}^{3N-k}$.
- $\Rightarrow$ Las variables **independientes** de un problema mecánico son

$$\{q_j, \dot{q}_j, t\},\ j = 1, \cdots, 3N - k.$$

.7

1.2. Desplazamientos virtuales

- Desplazamiento virtual $\{\delta x_i\}_{i=1}^{3N}$:
  - infinitesimal,
  - instantáneo, ocurre en un instante t en el cual las constricciones estan fijas,
  - los $\{\delta x_i\}_{i=1}^{3N}$ deben ser consistentes con constricciones.
- Para desplazamientos virtuales,

$$\delta x_i = \sum_{l=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \delta q_l,$$

en que se indica por δ la diferencia infinitesimal 'instantánea', con dt=0.

.8

2. Ecs. de Lagrange

2.1. Principio de d'Alembert

- "Las fuerzas de constricciones no trabajan en desplazamiento virtuales"
- $\Rightarrow \sum_i R_i \delta x_i = 0$ en que R_i es la reacción debido a las contricciones.
- Con 2$^{\mathrm{nda}}$ ley de Newton: $\Rightarrow F_i^a + R_i - \dot{p}_i = 0$, donde F_i^a es la fuerza aplicada, tenemos el Principio de d'Alembert:

$$\sum_i (F_i^a - \dot{p}_i)\delta x_i = 0. \tag{1}$$

- Notar que en el caso sin constricciones, los δx_i son independientes y se reduce a 2nda ley de Newton.
- Notar ausencia de fuerzas de reacción.

.9

2.2. Ecs. de Lagrange

- Trabajo de las fuerzas externas en un desplazamiento virtual:

$$\delta W = \sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x_i = \sum_{\sigma=1}^{3N-k} Q_\sigma \delta q_\sigma,$$

con $Q_\sigma \equiv \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma}$, fuerza generalizada.

- Introduciendo la energía cinética,

$$T \equiv \frac{1}{2}\sum_{i}^{3N} m_i \dot{x}_i^2,$$

se puede reescribir el principio de d'Alembert Ec. 1, en las Ecs. de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma,\ \sigma = 1, \cdots, 3N-k. \tag{2}$$

.10

Fuerzas conservativas, Lagrangeano

- Fuerza externa $F_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} V(\{x_i\}, t)$, y

$$Q_\sigma = -\frac{\partial}{\partial q_\sigma} V(\{q_j\}_{j=1}^{3N-k}, t),$$

- Introducimos Lagrangeano, $L = T - V$, y Ec. 2 da la Ec. de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = 0,\ \sigma = 1, \cdots, 3N-k. \tag{3}$$

.11

Ejemplos

- Péndulo.
- Masa en un anillo girando en un plano.
- Estabilidad, bifurcaciones: masa en un anillo girando con eje de rotacion que pasa por su centro y es paralelo a $\vec{g}$.

.12

3. Principio de mínima acción

Cálculo de variaciones

- Consideremos una función $y(x)$, y $I \equiv \int_{x_1}^{x_2} \phi(y, y', x) dx$, donde ϕ es un funcional de y y y'.
- La función $y(x)$ que extrema I, dado condiciones de bordes fijas en x_1 y x_2, es solución de las ecuaciones de Euler,

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial y'} - \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

.13

Principio de Hamilton

- Similitud con Ecs. de Euler, Ec. 4, sugiere que Ecs. de Euler-Lagrange, Ec. 3, derivan de un principio variacional. Para 1-D:

$$\begin{array}{rcl} x & \longrightarrow & t \\ y(x) & \longrightarrow & q(t) \\ y' & \longrightarrow & \dot{t} \\ \phi(y, y', x) & \longrightarrow & L(q, \dot{q}, t) \end{array}$$

- Definimos la *acción*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

y el principio de mínima acción arroja las Ecs. de Euler-Lagrange, Ec. 3.

.14

Lagrangeano de la partícula libre

- Ppio. de Hamilton $\Leftrightarrow$ formulación fundamental de la mecánica.
- Consideraciones fundamentales en relatividad Galileana conducen al Lagrangeano de la partícula libre,

$$L = \frac{1}{2} m v^2.$$

.15

4. Fuerzas de constricción

Modificación de las Ecs. de E.-L.

Tenemos k constricciones:

$$f_j(\{q_\sigma\}, t) = c_j, \;\; j = 1, \cdots, k \;\; \Rightarrow \{q_\sigma\}\textbf{no independientes}$$

$$\delta f_j = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma = 0.$$

$$\Rightarrow \int_{t1}^{t2} dt \sum_{\sigma=1}^{n} \delta q_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial q_\sigma} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_\sigma} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_\sigma} \tag{5}$$

En que rotulamos los q_σ independientes con $\sigma = 1, \cdots, n-k$. Los otros q_σ no son independientes. Pero elegimos $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ de manera a que se anulen los coeficientes de $\delta q_{n-k+1}, \cdots, \delta q_n$.

.16

Fuerzas de constricción

Comparación de E.L. modificada, Ec. 5 con ecuaciones de Lagrange, Ec. 2,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma, \ \sigma = 1, \cdots, 3N-k.$$

inspira identificar

$$Q_\sigma = -\frac{\partial V}{\partial q_\sigma} + \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_\sigma}}_{Q_\sigma^r} \tag{6}$$

Ejemplo: péndulo. .17

5. Cantidades conservadas

5.1. Símetrías y constantes

Constantes de movimientos

- E.L. orden 2 $\Rightarrow$ $2n-1$ constantes de integración que se pueden despejar en función de los $\{q_\sigma, \dot{q}_\sigma, t\}$.
- $\Rightarrow$ La especificación de las 'constantes de movimiento' resuelve el problema mecánico.

.18

Momentum generalizado

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\text{E.L.} \ \Rightarrow \ \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Reconocemos la 2nda ley de Newton para el caso de sistemas con $L = T(v^2) - V(\vec{q})$:

$$\dot{p}_i = Q_i,$$

con

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}, \ \text{fuerza generalizada.}$$

.19

Simetrías y constantes

- Si una coord. gen. q_σ no aparece en L, el correspondiente momentum gen. es constante que da la ec. de mov en σ:

$$\frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = 0 \ \Rightarrow \dot{p}_\sigma = 0.$$

- Si $\partial L/\partial q_\sigma = 0$ se dice que q_σ es cíclica.
- $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \;\Rightarrow\; \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = p_\sigma$ =Cte entrega una “primera integral”, una relación entre $\vec{q}$, $\dot{\vec{q}}$, y t.
- Si L es invariante ante alguna transformación contínua de coordenadas, asociamos una coordenada generalizada con esa simetría q_σ (ej: z en un sistema con simetría plano-paralela). Entonces $\partial L/\partial q_\sigma = 0$, y p_σ es Cte. $\Rightarrow$ la existencia de una simetría contínua implica la presencia de un momentum generalizado conservado.

.20

Ejemplos

- Movimiento 3-D en potencial 1-D función de $z \Rightarrow \dot{p}_x = \dot{p}_y = 0$.
- Movimiento en un potencial central $\Rightarrow p_\phi$ =Cte, correspondiente a la magnitud del momentum angular.
- Simetrías para un sistema cerrado. Homogeneidad del espacio $\Rightarrow L$ no depende de $\vec{q}$, si no dependería del origen $\Rightarrow$ conservación de momentum lineal y angular.

.21

El Hamiltoniano

$$H \equiv \sum_i p_i \dot{q}_i - L.$$

- Si $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dH}{dt} = 0$ en las trayectorias soluciones de la ecuación de movimiento.
- $H = E = T + V$ para sistemas en los cuales ni V ni las constricciones dependen de t.
- H es una función de q_σ y p_σ, es la transformada de Legendre de H en p.
- Ejemplo: Constante de mov. $H \neq E$ para anillo en aro rotando (al ser un sistema forzado E no es Cte. de mov.).

.22

5.2. Sistemas disipativos

- Roce: detalles micro muy complicados $\Rightarrow$ usar prescripción macro:

$$\vec{F}^d = -\vec{k} \cdot \vec{v}\hat{v}.$$

- Para introducir $\vec{F}^d$ en mecánica analítica introducimos la función disipativa de Rayleigh:

$$R = \frac{1}{2}\sum_i k_i \dot{x}_i^2, \text{ donde } F_i^d = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} = -k_i \dot{x}_i.$$

- Agregando a las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_i^d = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i}$$

- En coordenadas generalizadas usamos $\partial x_j / \partial q_\sigma = \partial \dot{x}_j / \partial \dot{q}_\sigma$,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\sigma} = 0.$$

.23

- Ejemplo: aro que rueda sin resbalar.

.24

5.3. Teoremas de conservación para N partículas

- Homogeneidad de $t \Rightarrow$ Hamiltoniano de un sistema cerrado es cantidad conservada.
- Homogeneidad del espacio $\Rightarrow$ momentum total P_i de un sistema cerrado es conservado,

$$P_i = \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i^a}.$$

- El momentum total se anula en el sistema centro de masa,

$$\vec{R} = \sum_a m_a \vec{r}_a / \sum_a m_a.$$

- Isotropía del espacio $\Rightarrow$ momemtum angular $\vec{L}$ es cantidad conservada:

$$\vec{L} = \sum_a \vec{r}_a \wedge \vec{p}_a.$$

.25

6. El sólido rígido

Cuerpo rígido con N partículas, 6 grados de libertad (3 de translación, 3 de rotación) $\Leftrightarrow 3N - 6$ constricciones holonónmicas

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \mathrm{Cte}.$$

.26

Velocidad angular

- Sea $\vec{R}$ el origen de un sistema S ligado al cuerpo, con velocidad $\vec{V} = d\vec{R}/dt$ en un sistema inercial $S_\circ$. Las normas de los vectores posiciones del cuerpo son constantes en S, $\Rightarrow$ el cuerpo describe una rotación en S. En $S_\circ$, para un punto en el cuerpo

$$\vec{v}_\circ = \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r},$$

donde $\vec{r}$ es medido en S, $\vec{v}_\circ$ es la velocidad en $S_\circ$, y $\vec{\Omega}$ es la velocidad angular.

- $\vec{\Omega}$ es independiente del origen $\vec{R}$: si eligimos otro origen $\vec{R}'$, también ligado al cuerpo, con $\vec{a} = \vec{R}' - \vec{R}$, $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$, y $\vec{v}_\circ = \vec{V}' + \vec{\Omega}' \wedge \vec{r}'$, entonces

$$\vec{V}' = \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{a} \;\text{ y }\; \vec{\Omega} = \vec{\Omega}' \tag{7}$$

- De Ec. 7, vemos que existe un $\vec{a}$ tal que $\vec{V}' = 0$. En este sistema S' el cuerpo describe una rotación pura con un eje de rotación llamado 'eje instantáneo de rotación', que pasa por el origen O', en $\vec{R}'$.

.27

Tensor de inercia, Lagrangeano

- En $S_\circ$, energía cinética: $T = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \int d^3x \rho(\vec{x}) \frac{1}{2} |\vec{v}_\circ(\vec{x})|^2$.
- Escribiendo T observado en $S_\circ$ en función de las cantidades medidas en el sistema S ligado al cuerpo, $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}_i|^2$.
- Si ubicamos el origen de S en el centro de masa, T se puede escribir

$$T = \frac{1}{2} M V^2 + \sum_{i,j=1}^{3} \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i \Omega_j, \;\text{ con } I_{ij} = \sum_{\sigma=1}^{N} m_\sigma (\delta_{ij} r_{\sigma,i}^2 - r_{\sigma,i} r_{\sigma,j}).$$

- Caso contínuo, $I_{ij} = \int d^3x \rho(\vec{x}) [x_i^2 \delta_{ij} - x_i x_j]$.

.28

Propiedades del tensor de inercia

- I_{ij} es simétrico. Toda matriz simétrica se puede diagonalizar. Los autovalores I_1, I_2, I_3 se llaman 'momentos principales de inercia', y las direcciones correspondientes del sistema S ligado al cuerpo se llaman los 'ejes principales de inercia'.
- Trompo asimétrico: $I_1 \neq I_2 \neq I_3$
- Trompo simétrico: dos momentos iguales.
- Teorema de los ejes paralelos: puede resultar más cómodo calcular I_{ij} en un sistema S' centrado en un origen O' distinto al centro de masa, pero con ejes paralelos a S. Entonces $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$, y

$$I_{ij} = I_{ij} + M(a_i^2 \delta_{ij} - a_i a_j).$$

- Momentum angular en sistema inercial ligado a C.M.: $L_i = \sum_{a=1}^{N} m_a (\vec{r}_a \wedge \vec{v}_a)\|_i = \sum_{k=1}^{3} I_{ik} \Omega_k$.
- Notar L y Ω NO paralelos.

.29

Movimiento del trompo libre, Ecuaciones de Euler

- Lagrangeano en el sistema inercial $S_\circ$: $L = \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i \Omega_j$ + E.L. $\Rightarrow \;\dot{L}_k = 0,\; k = 1, 2, 3$.

- Para pasar a una descripción usando componentes en el sistema ligado al cuerpo usamos

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{\text{inercial}} = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{\text{cuerpo}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{A},$$

para cualquier $\vec{A}$ y donde $\vec{\Omega}$ es el vector velocidad rotación angular.
- $\left.\dot{L}_k\right|_{\text{inercial}} = 0 \Rightarrow \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{\text{cuerpo}} = -\vec{\Omega} \wedge \vec{L}$, y

$$\begin{aligned} I_1\dot{\Omega}_1 &= \Omega_3\Omega_2(I_2 - I_3) \\ I_2\dot{\Omega}_2 &= \Omega_1\Omega_3(I_3 - I_1) \\ I_3\dot{\Omega}_3 &= \Omega_1\Omega_2(I_1 - I_2) \end{aligned}$$

.30

Oscilaciones del trompo simétrico

- Supongamos que $I_1 = I_2 \neq I_3 \Rightarrow \Omega_3 = \text{Cte}$, y

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 &= -A\Omega_2 \\ \dot{\Omega}_2 &= A\Omega_1, \text{ con } A = \Omega_3(I_3 - I_1)/I_1. \end{aligned}$$

- Vemos que Ω_1 y Ω_2 ejecutaran oscilaciones armónicas. Si en $t = 0$, $\vec{\Omega}$ esta en el plano $(\hat{e}_1, \hat{e}_3)$, formando un ángulo θ con $\hat{e}_3$,

$$\begin{aligned} \Omega_1(t) &= \Omega \sin(\theta) \cos(At) \\ \Omega_2(t) &= \Omega \sin(\theta) \sin(At) \\ \Omega_3(t_) &= \Omega \cos(\theta) \;\; \text{Cte.} \end{aligned} \tag{8}$$

- En el caso del planeta Tierra, $\theta \sim 6\ 10^{-7}$ rad o un desplazamiento de 4 m del polo Norte, y $A \sim \Omega/305$, i.e. una precesión de 305 días.

.31