

Parte II

Pequeñas Oscilaciones

Índice

II	1
1. Solución general	1
1.1. Formulación	1
1.2. Modos normales	2
1.3. Solución general	3
2. Coordenadas Normales	4
2.1. Matriz modal	4
2.2. Coordenadas normales	4
3. Muchos grados de libertad	5
3.1. Problemas de N cuerpos	5
3.2. Frecuencias normales	5
3.3. Modos normales	6
4. Límite continuo	8
4.1. Paso al continuo	8
4.2. Solución en modos normales	9
4.3. Lagrangeano para la cuerda	10
4.4. Coordenadas normales	10
4.5. Hamiltoniano	11
4.6. Mínima acción en medios continuos	11

1. Solución general

1.1. Formulación

- Vamos a considerar perturbaciones en torno al equilibrio de un sistema conservativo, con constricciones independientes de t .
- Energía cinética en coord. gen.:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \lambda} m_{\sigma\lambda} \dot{q}_\sigma \dot{q}_\lambda, \text{ con } \sigma, \lambda = 1, \dots, n,$$

donde $m_{\sigma\lambda} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \frac{\partial x_i}{\partial q_\lambda}$.

- Perturbaciones: $q_\sigma = \bar{q}_\sigma + \eta_\sigma$.
- En equilibrio, $Q_\sigma \equiv \frac{\partial V}{\partial q_\sigma} = 0$, y

$$V \approx V_0 + \sum_{\sigma,\lambda} \frac{1}{2} \overbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial q_\sigma \partial q_\lambda}}^{v_{\sigma\lambda}} \Big|_{\{\bar{q}_\sigma\}} \eta_\sigma \eta_\lambda.$$

- El Lagrangeano es

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{\sigma,\lambda} m_{\sigma\lambda} \dot{\eta}_\lambda \dot{\eta}_\sigma - v_{\sigma\lambda} \eta_\sigma \eta_\lambda \quad (1)$$

$$\Rightarrow \sum_{\lambda} m_{\sigma\lambda} \ddot{\eta}_\lambda + v_{\sigma\lambda} \eta_\lambda = 0. \quad (2)$$

.3

1.2. Modos normales

Un grado de libertad

- $m_{\sigma\lambda} \equiv m$, $v_{\sigma\lambda} \equiv k$.
- Solución de Eq. 2 es $\eta = \text{Re}(z)$,

$$z(t) = z_+ e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + z_- e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}, \text{ si } k > 0,$$

$$z(t) = z_+ e^{\sqrt{\frac{k}{m}}t} + z_- e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}, \text{ si } k < 0,$$

■

$$\Rightarrow \eta = \rho \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right).$$

.4

n grados de libertad

- Pasando a \mathbb{C} , Eq. 2 se escribe

$$\sum_{\lambda} m_{\sigma\lambda} \ddot{z}_\lambda + v_{\sigma\lambda} z_\lambda = 0, \text{ con } \eta_\sigma = \Re(z_\sigma). \quad (3)$$

- Buscamos soluciones de Eq. 3 en modos normales, en que todas las coordenadas oscilan con la misma frecuencia:

$$z_\sigma = z_\sigma^s \exp(i\omega t).$$

- Sustitución en Eq. 3 da

$$\sum_{\lambda=1}^n \underbrace{(v_{\sigma\lambda} - \omega^2 m_{\sigma\lambda})}_{a_{\sigma\lambda}} z_\lambda^s = 0 \quad (4)$$

- Eq. 4 tiene soluciones no triviales solo si $\det(a_{\sigma\lambda}) = 0$,

$$|v_{\sigma\lambda} - \omega^2 m_{\sigma\lambda}| = 0 \Rightarrow n \text{ raíces complejas } \omega_s^2, s = 1, \dots, n.$$

.5

n grados de libertad

- Props: los ω_s^2 son reales positivos (ver demo en clase).
- Como $\det(a_{\sigma\lambda}) = 0$, una de las n ecuaciones en Eq. 4 es combinación lineal de las otras. Eliminando la n -ésima, la Ley de Cramer nos da z_σ :

$$\begin{aligned} a_{1,1} \frac{z_1}{z_n} + \cdots + a_{1,(n-1)} \frac{z_{n-1}}{z_n} &= -a_{1,n} \\ &\vdots \\ a_{(n-1),1} \frac{z_{n-1}}{z_n} + \cdots + a_{(n-1),(n-1)} \frac{z_{n-1}}{z_n} &= -a_{(n-1),n} \end{aligned} \quad (5)$$

- Vemos que z_σ^s/z_n es real porque todos los coefs $a_{\sigma\lambda}$ son reales.

$$\Rightarrow z_\sigma^s = e^{i\phi_s} \rho_\sigma^s, \text{ con } (\phi_s, \rho_\sigma^s) \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

.6

Modos ortonormales

- Sustitución de Eq. 6 en Eq. 3 y combinando dos frecuencias normales s y t llegamos a

$$\sum_{\lambda\sigma} \rho_\sigma^t m_{\sigma\lambda} \rho_\lambda^s = \delta_{st} \quad (7)$$

- El modo normal correspondiente a la frecuencia normal (o ‘autovalor’) es

$$z_\sigma^s = C^s e^{i\phi_s} \rho_\sigma^s,$$

en que C^s y ϕ^s son las únicas constantes reales por especificar.

.7

1.3. Solución general

- $z_\sigma(t) = \sum_{s=1}^n (z_+^s)_\sigma e^{i\omega_s t} + (z_-^s)_\sigma e^{-i\omega_s t}$, $\sigma = 1, \dots, n$.
- Tomando parte real, $\eta_\sigma = \frac{1}{2}(z_\sigma^s + z_\sigma^{s*})$, y definiendo $(z_+^s)_\sigma + (z_+^s)_\sigma^* = C^s \rho_\sigma^s e^{i\phi_s}$, llegamos a

$$\eta_\sigma = \sum_{i=1}^n \rho_\sigma^s C^s \cos(\omega_s t + \phi_s).$$

- para determinar las constantes ϕ_s y C^s se usan las condiciones iniciales, $\eta_\sigma(0)$ y $\dot{\eta}_\sigma(0)$, y usando Eq. 7,

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma,\lambda} \rho_\lambda^t m_{\lambda,\sigma} \eta_\sigma(0) &= C^t \cos(\phi_t) \\ \sum_{\sigma,\lambda} \rho_\lambda^t m_{\lambda,\sigma} \dot{\eta}_\sigma(0) &= -\omega_t C^t \sin(\phi_t) \end{aligned}$$

\Rightarrow despejamos C^t y $\tan(\phi_t)$.

.8

2. Coordenadas Normales

2.1. Matriz modal

- Definimos la matriz modal $\mathcal{A}_{\lambda\sigma} = \rho_{\lambda}^{\sigma}$, es una matriz cuadrada independiente de las condiciones iniciales.
- prop.: la matriz modal diagonaliza la matriz masa $m_{\lambda\sigma}$:

$$\mathcal{A}^T m \mathcal{A} = \mathbb{I}.$$

- prop.: la matriz modal diagonaliza la matriz potencial $v_{\lambda\sigma}$:

$$\mathcal{A}^T v \mathcal{A} \Big|_{\sigma\lambda} = \omega_{\sigma}^2 \mathbb{I} \Big|_{\sigma\lambda}.$$

.9

2.2. Coordenadas normales

- Definimos un nuevo set de coordenadas generalizadas, ζ_{σ} , con

$$\eta(t) = \mathcal{A}\zeta(t), \text{ o bien, } \mathcal{A}^T m \eta(t) = \zeta(t).$$

- El Lagrangeano Eq. 1 se escribe

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\sigma,\lambda} m_{\sigma\lambda} \dot{\eta}_{\lambda} \dot{\eta}_{\sigma} - v_{\sigma\lambda} \eta_{\sigma} \eta_{\lambda} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} (\dot{\zeta}_{\sigma})^2 - \omega_{\sigma}^2 \zeta_{\sigma}^2$$

- Las ecuaciones de movimiento son entonces

$$\ddot{\zeta}_{\sigma} = -\omega_{\sigma}^2 \zeta_{\sigma}, \quad \sigma = 1, \dots, n.$$

- Vemos que las coordenadas normales desacoplan el problema de pequeñas oscilaciones. Las soluciones son,

$$\zeta_{\sigma} = C^{\sigma} \cos(\omega_{\sigma} t + \phi_{\sigma}), \text{ y usando la definición de } \zeta_{\sigma},$$

$$\eta_{\lambda} = \sum_{\sigma} \rho_{\lambda}^{\sigma} C^{\sigma} \cos(\omega_{\sigma} t + \phi_{\sigma}).$$

.10

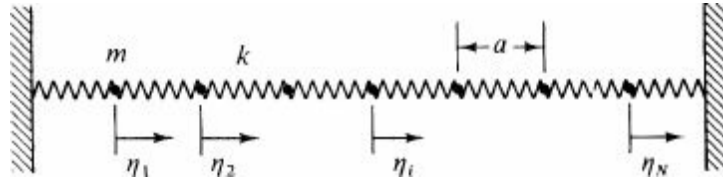
Ejemplos

- Dos péndulos acoplados
- Ortogonalización de Graham-Schmidt (Fetter 4.10)

.11

3. Muchos grados de libertad

3.1. Problemas de N cuerpos



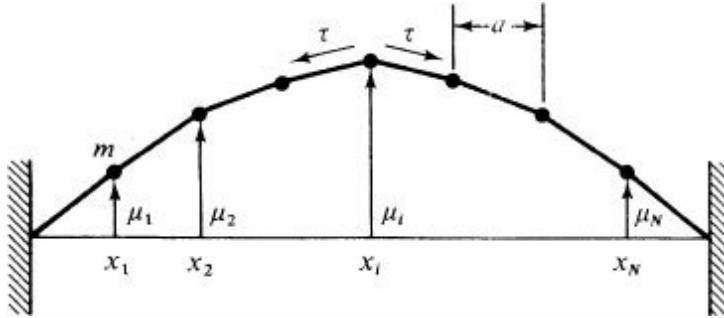
- Modelo de red cristalina 1-D.

$$L = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^N \dot{\eta}_i^2 - \frac{1}{2}k \sum_{i=0}^N (\eta_{i+1} - \eta_i)^2, \text{ con } \eta_0 = \eta_{N+1} = 0,$$

$$m\ddot{\eta}_i + 2k\eta_i - k(\eta_{i+1} + \eta_{i-1}) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

.12

- Oscilaciones transversas de N masas en una cuerda sin masa.



Mécanica vectorial da ec. de mov.:

$$m\ddot{\mu}_i + \frac{2\tau}{a}\mu_i - \frac{\tau}{a}(\mu_{i+1} + \mu_{i-1}) = 0 \text{ con } \mu_0 = \mu_{N+1} = 0. \quad (8)$$

Similitud con modelo de red 1 - D sugiere $k \leftrightarrow \tau/a$ y

$$L = \frac{1}{2}m \sum_i (\dot{\mu}_i)^2 - \frac{\tau}{2a} \sum_{i=0}^N (\mu_{i+1} - \mu_i)^2. \quad (9)$$

.13

3.2. Frecuencias normales

- Modos normales $\mu_i = C\rho_i \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow$

$$\text{Ec. de mov. } \left(\frac{2\tau}{a} - m\omega^2\right)\rho_i - \frac{\tau}{a}(\rho_{i+1} + \rho_{i-1}) = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

con $\rho_0 = \rho_{N+1} = 0$.

- Introduciendo $\lambda \equiv 2 - \frac{m\omega^2 a}{\tau}$,

$$\lambda\rho_i - (\rho_{i+1} + \rho_{i-1}) = 0.$$

.14

- El conjunto de ecuaciones lineales $\lambda\rho_i - (\rho_{i+1} + \rho_{i-1}) = 0$ tiene soluciones no triviales solo si su determinante $D_N = 0$. \Rightarrow (ver cátedra)

$$D_N = \lambda D_{N-1} - D_{N-2}.$$

- Buscamos soluciones en $D_N = Ae^{iBN}$,

$$\longrightarrow D_N = A_+e^{iN\psi} + A_-e^{-iN\psi}, \text{ con } \lambda \equiv 2 \cos(\psi).$$

Los A_{\pm} estan dados por D_1 y D_2 :

$$D_N = \frac{\sin((N+1)\psi)}{\sin(\psi)} = 0, \Rightarrow (N+1)\psi = n\pi, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \psi \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

- Usando $\lambda = 2 - m\omega^2 a/\tau = 2 \cos(\psi)$,

$$\omega^2 = \frac{2\tau}{ma}(1 - \cos(\psi)) = \frac{4\tau}{ma} \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right).$$

- De Ec. 10,

$$\omega^2 = \frac{4\tau}{ma} \sin^2\left(\frac{1}{2} \frac{n\pi}{N+1}\right), n = 1, \dots, N.$$

.15

3.3. Modos normales

- Sustitución de las frecuencias normales en la Ec. de mov. Ec. 8 da

$$2 \cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right) \rho_i^n = \rho_{i+1}^n + \rho_{i-1}^n.$$

- Las soluciones están dadas por el mismo método que para las raices de $D_N = 0$, pero es interesante un método alternativo: Introducimos $\mu(x_j) = \mu_j$, con $x_j = ja$, y buscamos soluciones de la forma

$$\mu(x_j, t) = \Re(A \exp(i[kx_j - \omega t])), \quad (11)$$

o bien con $-k$.

- Sustitución de Ec. 11 en Ec. 8 da

$$\omega^2 = \frac{2\tau}{ma}(1 - \cos(ka)) = \frac{4\tau}{ma} \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right).$$

.16

Usamos dos tipos de condiciones de borde:

■ Condiciones de borde periódicas

$$\mu(x_i) = \mu(x_{N+i}) = \mu(x_i + Na),$$

y usando Ec. 11, $e^{ikNa} = 1 \Leftrightarrow k = 2n\pi/Na$, con

$$\begin{aligned} n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \frac{1}{2}(N-1) \text{ para } N \text{ impar,} \\ n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \frac{1}{2}(N-1), \frac{N}{2} \text{ para } N \text{ par,} \end{aligned}$$

En que usamos la condición de que deben haber exactamente N modos normales.

.17

■ Condiciones de borde con extremos fijos.

- La solución general del tipo Ec. 11 es

$$\mu(x_j, t) = \Re(A_+ e^{i[kx_j - \omega t]} + A_- e^{i[-kx_j - \omega t]}),$$

y las condición $\mu(0) = 0$ da $A_+ = -A_-$.

- Con $\mu(x_{N+1}) = \mu((N+1)a) = 0$ tenemos

$$\sin(k(N+1)a) = 0 \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a(N+1)}, \quad n = 1, \dots, N.$$

- Vemos que la expresión para $k(n)$ es equivalente al aplicar la ‘relación de dispersión’ Ec. 16 a las $\omega(n)$ dadas por el método $D_N = 0$.
- Con este método alternativo tenemos la expresión para los modos normales:

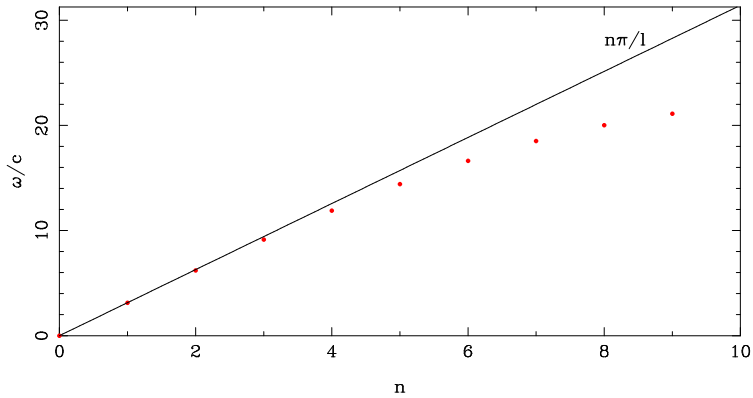
$$\mu(x_j, t) = 2iA_n \sin\left(\frac{n\pi x_j}{a(N+1)}\right) \exp(i\omega t),$$

vemos que $\mu(x_j, t) \propto \rho_j^n$ pero sin normalizar, ver aux..

.18

En resumen, graficamos

$$\omega_n/c = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{n\pi a}{l2}\right), \quad \text{con } l \equiv (N+1)a, \quad \text{donde } c \equiv \sqrt{\tau/(m/a)}.$$



Notar la existencia de una frecuencia normal máxima para sistemas discretos. Cuando $N \gg 1$, $(\omega_n/c)_{\max} \approx 2/a$, con una longitud de onda mínima $\lambda = 2a(N + 1)/n > 2a$.

4. Límite continuo

4.1. Paso al continuo

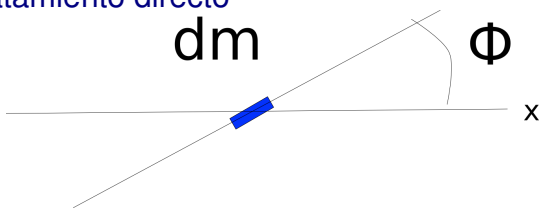
- Tomamos el ejemplo de las oscilaciones transversas de una cuerda con masas, y llevamos $N \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$, con $\sigma = m/a$ constante.

■ \Rightarrow

$$\omega_n \rightarrow c \frac{n\pi}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Soluciones en modos normales (\sim ondas planas) $\mu(x, t) = A \exp(i[kx - \omega t])$, con $k = (2\pi n)/l, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$.

Tratamiento directo



- Ec. de mov. de la cuerda. $\sin(\phi) \sim \phi \sim \tan \phi = \partial u / \partial x$.

$$\text{Newton: } \sigma dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau(x + dx) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx} - \tau(x) \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

- Tarea: verificar que se obtiene la misma ecuación desde Ec. 8 pasando al continuo.
- Si σ y τ son constantes llegamos a Ec. de ondas 1-D:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{12}$$

4.2. Solución en modos normales

- Ponemos $u(x, t) = C\rho(x) \cos(\omega t + \phi)$.
- Sustitución en Ec. de ondas, Ec. 12, da:

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} + k^2\rho = 0, \text{ con } k = \omega/c \Rightarrow \rho(x) = A \sin(kx + \theta).$$

- Extremos fijos, $\rho(0) = \rho(l) = 0 \rightarrow \rho(x) \propto \sin(kx)$, con $k = n\pi/l$, $n \in \mathbb{N}$.
- Para satisfacer condiciones de bordes, **el largo de la cuerda debe ser un múltiplo de la longitud de onda media**, i.e. $\lambda = 2l/n$.
- Vemos que el desplazamiento transversal en el caso continuo es el mismo que en el caso discreto.
- Por analogía con caso discreto, la solución general de la ec. de ondas se construye por superposición de los modos normales,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^n(x) \cos(\omega_n t + \phi_n). \quad (13)$$

- O bien, en notación de Fourier, Ec. 13 se escribe

$$u(x, t) = \sum_n \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \sin(k_n x) [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)], \quad (14)$$

donde, $a_n = C_n \cos(\phi_n)$, $b_n = -C_n \sin(\phi_n)$.

- a_n y b_n se despejan de las condiciones iniciales $u(x, t = 0)$ y $\dot{u}(x, t = 0)$, usando la ortonormalidad de los modos.
- En el caso continuo, la relación de ortonormalidad, Ec. 7, se escribe

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty, a \rightarrow 0} \sum_{\mu=1}^N a \rho^t(x_\mu) \frac{m}{a} \rho^s(x_\mu) &= \delta_{st}, \\ \Rightarrow \int_0^l dx \rho^t(x) \sigma \rho^s(x) &= \delta_{st}. \end{aligned} \quad (15)$$

- Tarea: confirmar Ec. 15 para modos normales continuos 1D.
- Con la ortonormalidad, podemos despejar los a_n y b_n de Ec. 14 usando las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^l \rho^n(x) u(x, 0) \sigma dx = \sqrt{2} l \sigma \int_0^l \sin(k_n x) u(x, 0) \sigma dx, \\ \omega_n b_n &= \int_0^l \rho^n(x) \dot{u}(x, 0) \sigma dx = \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \int_0^l \sin(k_n x) \dot{u}(x, 0) \sigma dx. \end{aligned}$$

.22

.23

.24

4.3. Lagrangeano para la cuerda

Lagrangeano por límite continuo

- De Ec. 9,

$$L = \frac{1}{2} \frac{m}{a} \sum_i a (\dot{\mu}_i)^2 - \frac{\tau}{2a} \sum_{i=0}^N a \left(\frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{a} \right)^2.$$

- Pasando al límite continuo, $a \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, $\mu_i(t) = u(x_i, t)$,

$$L = \frac{\sigma}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{\tau}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.$$

.25

Lagrangeano por tratamiento directo

- La energía cinética de un elto de masa dm es

$$\frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2,$$

- Para la cuerda entera,

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l dx \sigma \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2.$$

- La energía potencial esta dada por el trabajo que ejercen las fuerzas de tension **internas a dm , que tienden a devolverlo a su largo en reposo dx :**

$$\begin{aligned} dW &= -\tau(ds - dx) = -\tau dx \left[\left\{ 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\}^{1/2} - 1 \right] \\ &\approx \frac{\tau}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 dx = -dU. \quad \rightarrow V = \frac{\tau}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \end{aligned}$$

.26

4.4. Coordenadas normales

- Solución general cuerda con extremos fijos:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(x) C_n \cos(\omega_n t + \phi_n), \quad (16)$$

$$\text{con } \rho_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l\sigma}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \text{ y } \int_0^l dx \rho_n(x) \sigma \rho_m(x) = \delta_{mn}$$

- Del parecido con $\mu_i(t) = \sum_{i=1}^N \rho_i^n \zeta_n$, definimos

$$\zeta_n(t) = C_n \cos(\omega_n t + \phi_n), \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(x) \zeta_n(t).$$

.27

- Integrando por partes $V = \frac{\tau}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$, y usando ec. de ondas en Eq. 16 para $\partial^2 u_n(x)/\partial x^2$:

$$V(x) = \frac{\tau}{2} \int_0^l \left[\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(x) C_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \right] \left[\sum_{m=1}^{\infty} \rho_m(x) C_m k_m^2 \cos(\omega_m t + \phi_m) \right], \quad (17)$$

y usando la ortonormalidad de los modos,

$$V(x) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m^2 \zeta_m^2.$$

- Para la energía cinética, $T = \frac{1}{2} \int dx \sigma (\partial u / \partial t)^2$, tenemos

$$T = \frac{1}{2} \sum_m (\dot{\zeta}_m)^2.$$

- Desacoplamos el Lagrangeano:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (\dot{\zeta}_m^2 - \omega_m^2 \zeta_m^2), \text{ con ec. de mov } \ddot{\zeta}_n = -\omega_n^2 \zeta_n.$$

.28

4.5. Hamiltoniano

- $H = T + V$ ya que \mathcal{L} no depende de t , ni tampoco la relación entre (x, y) y las coord. gen. u_i .
- $\Rightarrow H = T + V = \frac{1}{2} \sigma \int_0^l dx \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} \tau \int_0^l dx \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$.
- $\Rightarrow H = E = \frac{1}{2} \sum_n ((\dot{\zeta}_n)^2 + \omega_n^2 (\zeta_n)^2)$, y usando $\zeta_n = C_n \cos(\omega_n t + \phi_n)$,

$$H = E = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 C_n^2.$$

.29

4.6. Mínima acción en medios contínuos

- Introducimos la densidad Lagrangeana $\mathcal{L}(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}; x, t)$:

$$\delta S = 0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx \mathcal{L}(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}; x, t) = 0.$$

- Considerando una variación δu con $\delta u(x=0, t) = \delta u(x=l, t) = \delta u(x, t_1) = \delta u(x, t_2) = 0$, i.e. con condiciones de bordes fijas, llegamos a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u / \partial t)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial u / \partial x)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0.$$

- Con $L = \int_0^l dx \underbrace{\left(\frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right)}_{\mathcal{L}}$, recuperamos ec. de ondas 1D.