.1

## El desarrollo de la Mecánica Cuántica

**1900** Radiación de cuerpo negro (Planck).
**1905** Efecto fotoeléctrico y cuantas de energía (Einstein).
**1905** Movimiento Browniano y tamaño atómico (Einstein).
**1907** Calor específico de los sólidos y cuantización de la energía térmica (Einstein).
**1911** Núcleo atómico (Rutherford).
**1913** Modelo atómico (Bohr).
**1916** Emisión estimulada y formación de líneas espectrales (Einstein).
**1924** Dualidad onda-partícula (de Broglie).
**1925** Principio de incerteza (Heinsenberg).
**1926** Mecánica ondulatoria (Schrödinger).
**1928** Spin del electrón (Dirac).

.2

# Parte II
# Mecánica Cuántica

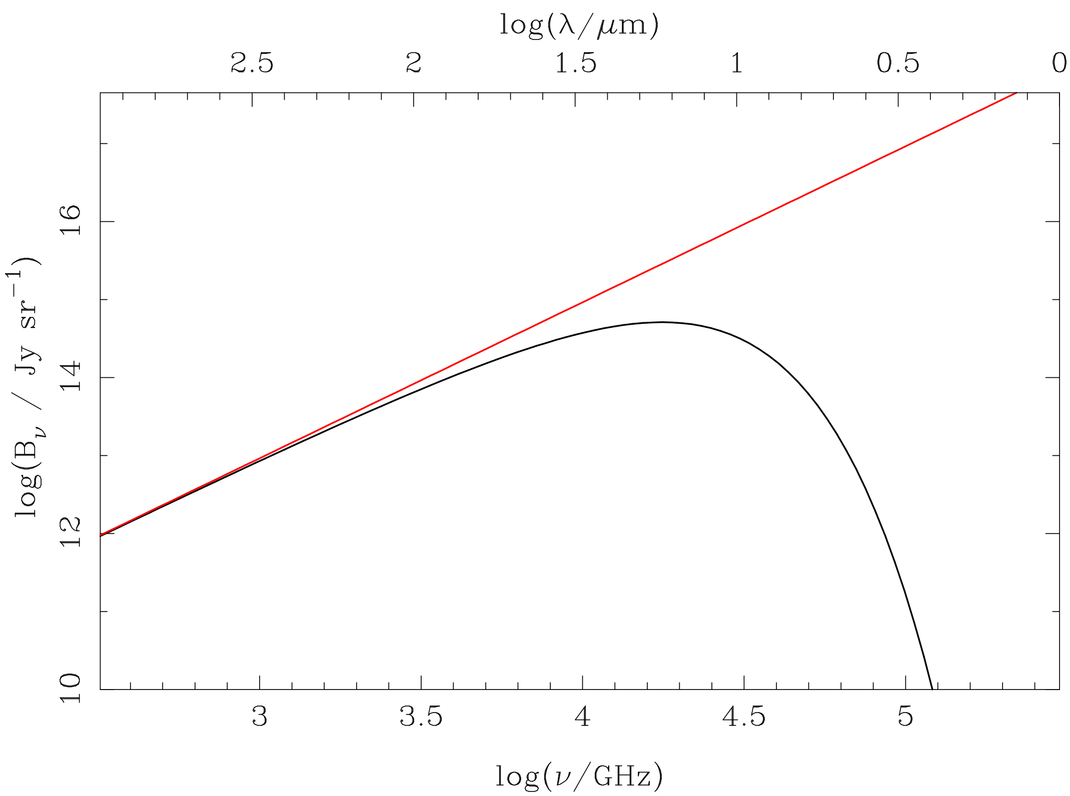
## Índice



.3

# 1. El desarrollo del quantum

## 1.1. Radiación de cuerpo negro




.4

- Densidad de estados de modos normales $(\vec{E}, \vec{B})$ en un volumen $\mathcal{V}$:

$$N(\nu) = \frac{4\pi\nu^2}{c^3}\mathcal{V}$$

- 2 grados de libertad de polarización por modo, cada uno con $kT/2 \Rightarrow$ la densidad de energía es:

$$\rho(\nu) = kTN(\nu) \;\;\Rightarrow\;\; \text{catástrofe UV.}$$

- Planck hip1: sacar promedio por modo cambiando $\int \to \sum$,

$$\langle U \rangle = \int \mathcal{P}(U)\, U dU \;\;\to\;\; \sum P(U)\, U, \text{ con } U = n\mathcal{U}.$$

- Planch hip2:

$$\mathcal{U} = h\nu.$$

- Experimento da $h = 6{,}62\ 10^{-34}$ J s.

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right]}.$$

.5

## Propiedades de la función de Planck

- Ley de Wien:

$$\left.\frac{dB_\nu}{d\nu}\right|_{\nu\max} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{h\nu}{kT} \approx 4{,}965,$$

$\boxed{\frac{\lambda_{\max}}{\mathrm{cm}}\frac{T}{\mathrm{K}} = 0{,}29,}$ con $\lambda_{\max} = c/\nu_{\max}$. OJO: $B_\lambda d\lambda = B_\nu d\nu$.

- Ley de Stefan-Boltzmann:

$$\int B_\nu d\nu = B(T) = \frac{2h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \overbrace{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx}^{\pi^4/15},$$

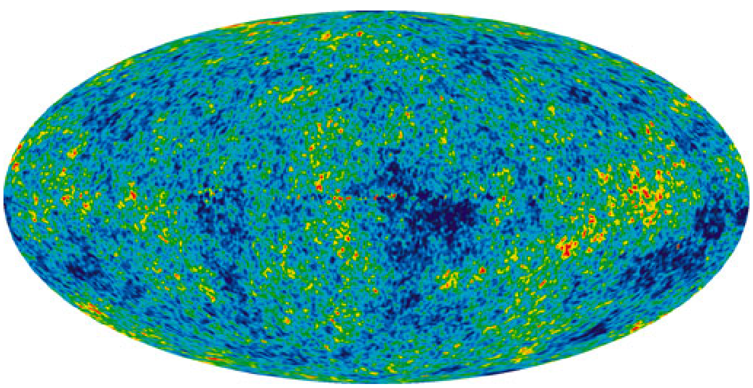
$\boxed{B(T) = aT^4,}$ con $\sigma = a\pi = 5{,}67\ 10^{-8}$ W m$^{-2}$ K$^{-4}$. Notar que $\pi B(T)$ es el flujo por unidad de área.

- Ley de Rayleigh-Jeans:

$$\lim_{h\nu \ll kT} B_\nu = \frac{2\nu^2}{c^2}kT \text{ caso clásico, } h \to 0.$$

.6

## Ejemplo: radiación de fondo

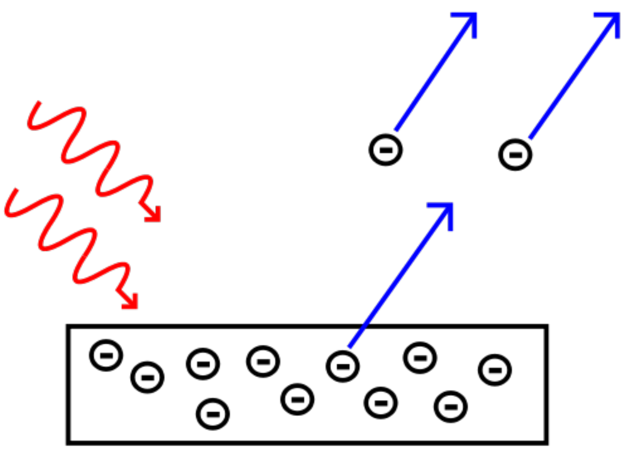


$$\underbrace{\frac{8}{3}\pi G\frac{\rho}{H}}_{\Omega_m} \;\; \underbrace{\pm\frac{1}{a^2R^2H}}_{\Omega_R} \;\; + \underbrace{\frac{\Lambda}{H3}}_{\Omega_\Lambda} = 1,$$

$$\Omega_\Lambda \sim 0{,}7 \;\; \Omega_R = 0, \;\; \Omega_m \sim 0{,}3,$$

sólo 2 % de $\Omega_m$ es contribuido por bariones. .7

## 1.2. Efecto fotoeléctrico



Radiación UV extrae electrones. En el caso de un metal, se puede usar la placa conductora iluminada como elemento de un condensador

.8

## 1.3. Movimiento browniano

.9

## 1.4. Calor específico de los sólidos

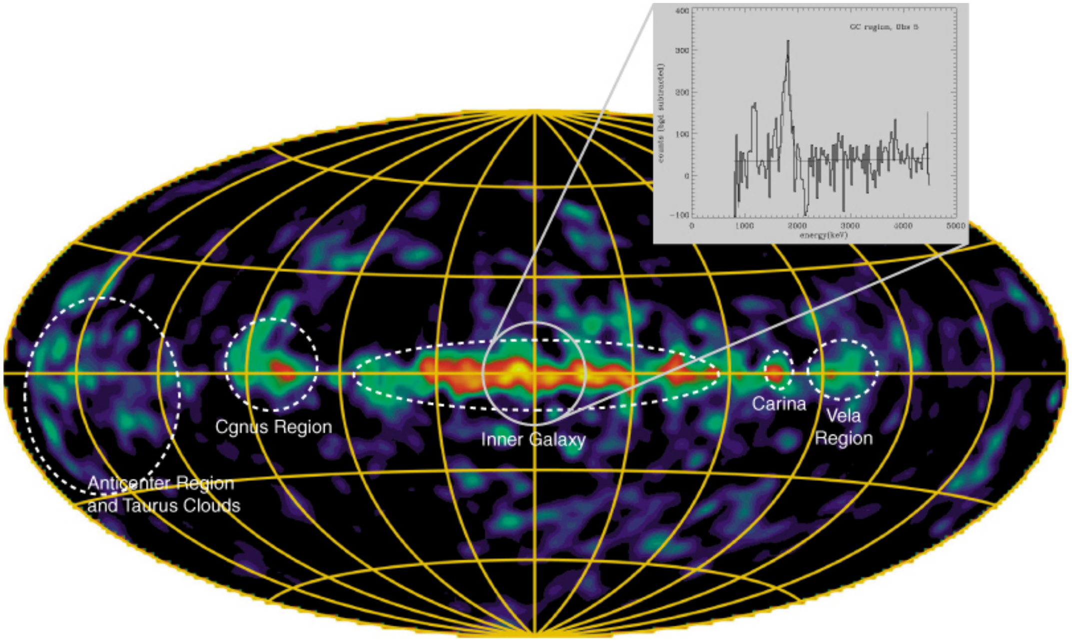
.10

# 2. Teoría atómica

## 2.1. Radioactividad natural

Ejemplo: datación $^{14}$C .11

Ejemplo: irradiación temprana del sistema solar.




.12

## 2.2. Experimento de Rutherford

.13

### Modelo planetario

Decaimento radiativo en $\sim 10^{10}$ s. .14

## 2.3. Modelo de Bohr

### Espectroscopía

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \; m > n, (m,n) \in \mathbb{N},$$

$$R_H = 109677{,}576 \text{ cm}^{-1}.$$

.15

### Modelo de Bohr

1. Existen estados estacionarios para electrones en equilibrio dinámico, según mecánica clásica pero sin irradiar.
2. Si electrón pasa de estado $E_n$ a $E_m$ emite/absorbe $h\nu_{nm} = E_m - E_n$.
3. Niveles de energía:

   **1**: Las frecuencias de transición estan dadas por la fórmula de Balmer

   **o**

   **2**: sólo son permitidas órbitas con $L = mvr = nh/2\pi$.
4. Principio de correspondencia, si $n \to \infty$ se recupera física clásica.

Tarea: demostrar que los Postulados 3.2 y 3.1 son equivalentes.

Tarea: comparar frecuencia clásica con frecuencia cuantica (en función del radio de la órbita).

.16

## Regla de cuantización de Sommerfeld-Wilson

- ¿ Qué relación existe entre cuantización de Planck ($E_n = nh\nu$) y Bohr ($L_n = n\hbar$)?
- Problema de Bohr: falla para átomos grandes.

Extensión del modelo de Bohr por Sommerfeld-Wilson:

$$\oint pdq = nh \text{ para variable cíclicas.}$$

- Orbitas ciculares: $L \leftrightarrow \theta \Rightarrow$

$$\oint Ld\theta = 2\pi L = nh$$

.17

## Ejemplo cuantización de S.-W.: Oscilador armónico

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2, \text{ es constante de movimiento,}$$

$$\Leftrightarrow \frac{q^2}{2E/(m\omega^2)} + \frac{p^2}{2mE} = 1.$$

Familias de elipses con $a^2 = 2E/(m\omega^2)$ y $b^2 = 2mE$,

$$\text{S.-W.} \Rightarrow \oint pdq = \pi ab = nh, \Rightarrow E_n = nh\nu \text{ Planck-Einstein.}$$

.18

## Bohr, S.-W., y átomos grandes

Consideremos Lagrangiano de Coulomb en esféricas:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{e^2}{r} = L(r, \dot{r}, \dot{\theta}.$$

$\theta$ cíclica $\rightarrow \oint p_\theta d\theta = n_\theta h \rightarrow p_\theta = n_\theta \hbar$. En $r$,

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \rightarrow \oint p_r d_r = n_r h.$$

$n_\theta$, $n_r$ son enteros independientes, i.e. existen DOS números cuánticos para órbitas elípticas.

Tarea:

$$E(n) = -\frac{me^2}{2\hbar^2 n^2}, \text{ con } n = n_\theta + n_r \text{ \#número cuántico principal,}$$

$$a = (n_r + n_\theta)^2 \frac{\hbar^2}{me^2} = \frac{n^2 K^2}{me^2}, \; b = n_\theta(n_r + n_\theta)\frac{\hbar^2}{me^2} = n_\theta \frac{nK^2}{me^2}.$$

.19

### Parches de parches....

- Pb. nuevo: se observan menos líneas en espectro que lo predecido por $E_n - E_m = h\nu$. Hay transiciones que no existen para átomos con $Z > 1$. Se parcha teoría con *reglas de selección*.
- $E(n_\theta, n_r) \to$ pueden haber varios valores de $n_r, n_\theta$ dato $E \to$ estados cuánticos degenerados.
- Si se introduce $\vec{B}$ externo, se levanta degeneración:
    - Nivel degenerado conduce a un número impar de niveles $\to 0 \leq l < n$ y $L_z = m\hbar$ con $m = -l, -l+1, ..., l-1, l$ (y resulta que $|L|^2 = l(l+1)\hbar^2$).
    - Nivel no degenerado igual se divide en DOS, con $m \sim s_z = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\hbar$.

.20

## 2.4. Coeficientes de Einstein

.21

# 3. Mecánica ondulatoria

## 3.1. Dualidad onda-partícula

.22

## 3.2. Principio de superposición

.23

## 3.3. Incerteza $(x, p)$, $(t, E)$

### Difracción de electrones .24

### Paquetes de ondas .25

## 3.4. Ecuación de Schrödinger

.26

### Corriente de probabilidad .27

### Ecuación de Klein-Gordon .28

## 3.5. Soluciones de la ecuación de Schrödinger

### Efecto tunel .29

# 4. Spin y partículas idénticas