

Deficiencias de la física del siglo XIX

A fines del siglo XIX la física consistía de la termodinámica y del electromagnetismo, y ‘solo’ tenía las siguientes deficiencias, que no podía explicar:

- A Velocidad finita de la luz.
- B Catástrofe UV y calor específico de los sólidos.
- C Inexplicables líneas de absorción en el espectro solar, y líneas espectrales en general.

Los problemas B y C fueron resueltos por la mecánica cuántica, y los trataremos en la Parte 2. En esta parte estudiaremos el origen de A.

Parte I

Relatividad Especial

Índice

I	Relatividad Especial	1
1.	Introducción: principio de relatividad	2
1.1.	Desarrollo histórico	2
1.2.	Principio de relatividad especial	3
1.3.	Principio de equivalencia y relatividad general	3
2.	Transformaciones de Lorentz (Einstein 1905)	3
2.1.	Simultaneidad	4
2.2.	La relatividad de los tiempos	4
2.3.	Transformaciones de coordenadas	5
3.	Aplicaciones cinemáticas y efecto Doppler para la luz	6
3.1.	Contracción de longitudes, dilatación de tiempos.	6
3.2.	Composición de velocidades	6
3.3.	Efecto Doppler lumínico	7
4.	Espacio-tiempo	7
4.1.	Notación tensorial y causalidad	7
5.	Mecánica relativista	9
5.1.	Acción, momentum y energía	9
5.2.	Transformación de momentum y energía	12
5.3.	Equivalencia masa-energía	13

1. Introducción: principio de relatividad

1.1. Desarrollo histórico

Primeras mediciones de la velocidad de la luz

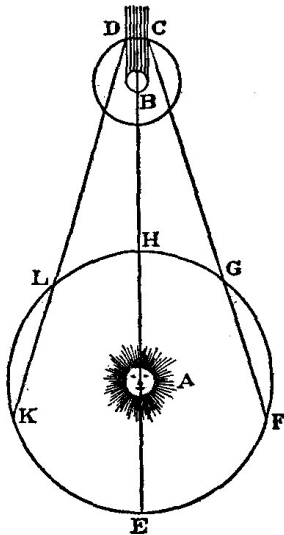
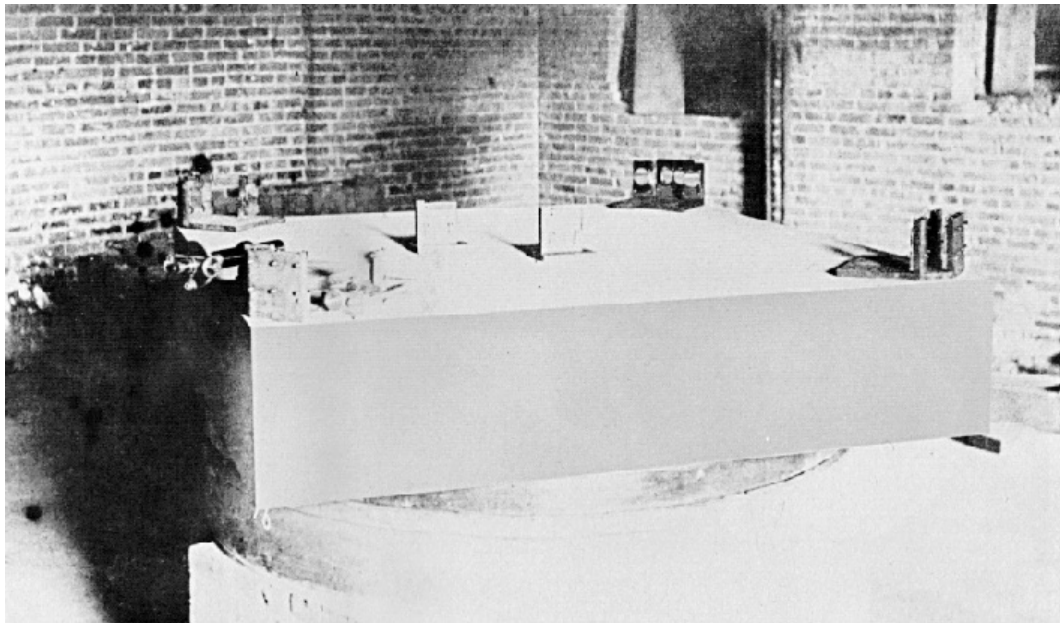


FIG. 70.

Ya en 1676 Rømer había demostrado la constancia de la velocidad de la luz usando las variaciones de la órbita de Io en función de la distancia Tierra-Júpiter. Ver wikipedia. Luego Bradley lo confirmó en 1728, observando la aberración estelar anual. Anualmente la posición aparente de una estrella en el plano de la eclíptica se mueve con una amplitud de 40''.

Experimento de Michelson-Morley (1887)



Proposición de Lorentz

Lorentz sugiere que los materiales se contraen en la dirección de su movimiento,

$$L_{\text{ether}} = L \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}.$$

Con esta propuesta de Lorentz, se arregla experimento de Michelson-Morley.

.6

1.2. Principio de relatividad especial

Poincaré concluyó que no es posible medir una velocidad absoluta, o que no existe una velocidad absoluta. *Las leyes de los fenómenos físicos deben ser las mismas para un observador fijo que para un observador en movimiento uniforme respecto a él, tal que no tenemos, ni de ninguna manera podremos tener, alguna manera de discernir si estamos en un movimiento uniforme.*

⇒ Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas en translación uniforme.

⇒ Invariancia de c deriva de invariancia de las ecuaciones de Maxwell.

.7

“On the Electrodynamics of Moving Bodies”, Einstein (1905)

Einstein demuestra que es necesario revisar las transformaciones de Galileo, y que el tiempo es relativo.

- Dilatación del tiempo.
- Contracción de longitudes.

.8

1.3. Principio de equivalencia y relatividad general

Principio de equivalencia (Einstein 1907)

Un sistema de referencia no inercial es equivalente a un campo gravitacional ⇒ es imposible distinguir entre movimientos acelerados y campo gravitacional.

⇒ Espacio-tiempo es curvo.

.9

Enunciados relatividad general

- **Principio de equivalencia debil.** En presencia de un campo gravitacional, un observador en caída libre no siente ningún efecto gravitacional, y el espacio-tiempo será plano (i.e. Minkowski).
- **Principio de equivalencia fuerte.** Las leyes de la física son las mismas en un sistema en caída libre que en la ausencia de gravedad. ⇒ las ecuaciones que rigen los fenómenos físicos deben preservar la misma forma ante cualquier cambio de coordenadas (i.e. las fuerzas no-inerciales muestran que $F = ma$ está mal escrito).

.10

2. Transformaciones de Lorentz (Einstein 1905)

Concepto clave: Evento \Leftrightarrow punto en el espacio-tiempo.

.11

2.1. Simultaneidad

- En un sistema S la posición de un punto P se determina con estándares rígidos.
- Estudiar movimiento de un punto material \Leftrightarrow dar trayectoria, i.e. coordenadas en función de t . Trayectoria solo sirve si definimos claramente lo que es t .
- Todas las mediciones de t son mediciones de simultaneidad. “Tren llega a las 7h” \Leftrightarrow Evento “aguja chica apunta al 7” y evento “llegada del tren” son simultáneos.

.12

Relojes sincronizados y tiempo

- Dos observadores A y B , estacionarios, pueden medir el tiempo de eventos en su vecindad. Pero falta definir el tiempo común a A y B .
- Decimos que A y B están sincronizados si el tiempo que demora la luz en AB es el mismo para A y B . 3 eventos: emisión en A , reflejo en B , recepción en A .

$$t_B - t_A^1 = t_A^2 - t_B,$$

A calcula t_B , y le pregunta a B si efectivamente llegó la señal lumínica en t_B .

- El tiempo de un evento en un sistema S es aquel dado simultáneamente por un reloj en la posición del evento, estacionario en S , este reloj estando sincronizado con un reloj estacionario de referencia (digamos en el origen de S).

.13

2.2. La relatividad de los tiempos

“Las leyes por las cuales cambian los sistemas físicos no son afectadas si estos cambios son referidos a uno u otro sistema de coordenadas en movimiento de translación uniforme”

\Rightarrow “Cualquier rayo de luz se mueve en el sistema S con la velocidad c , independientemente de si fue emitido por un cuerpo estacionario o en movimiento”.

.14

- Consideremos un palo rígido con largo en reposo L_0 , en movimiento con velocidad $+u\hat{x}$, ligado a un sistema S' . En S' se puede medir el largo usando metro patrón.
- En S se pueden usar observadores con relojes sincronizados. En t un continuo de observadores estacionarios puede determinar las posiciones de las puntas del palo. La distancia entre estos puntos es lo que S llamaría largo del palo.

- Según S , ¿Están sincronizados los relojes en las puntas del palo?

$$\begin{aligned} c(t_B - t_A^1) &= L_o + u(t_B - t_A^1) \\ c(t_A^2 - t_B) &= L_o - u(t_A^2 - t_B) \end{aligned}$$

$\Rightarrow t_B - t_A^1 \neq t_A^2 - t_B$. Para S los relojes de S' no están sincronizados, aunque por construcción si lo esten en S' .

.15

2.3. Transformaciones de coordenadas

Buscamos $(\vec{r}', t) = f(\vec{r}, t)$.

- f debe ser lineal, por homogeneidad del espacio:

$$f(\alpha r_i, \alpha t) = \alpha f(r_i, t).$$

Ponemos $(r'_i, t') = \mathbf{A}(r_i, t)$.

- $t'(x, y, z, t) = t'(x, -y, -z, t) \forall (y, z) \Rightarrow a_{42} = 0, a_{43} = 0$.
- $x'(x, y, z, t) = x'(x, -y, -z, t) \Rightarrow a_{12} = 0, a_{13} = 0. \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta t \\ t' &= \epsilon x + \delta t \end{aligned} \tag{1}$$

.16

- En el origen de S' $x' = 0$, y $x = ut \Rightarrow \beta = -\alpha u$.
- Un rayo de luz parte en dirección de $+\hat{x}$, desde el origen de S , y S' , que coinciden en $t = 0$: $x = ct$, y $x' = ct' \Rightarrow$

$$\alpha c + \beta = c^2 \epsilon + c \delta. \tag{2}$$

- Si el rayo parte en dirección $-\hat{x}$,

$$-\alpha c + \beta = c^2 \epsilon - c \delta. \tag{3}$$

De Ecs. 2 y 3,

$$\beta = \epsilon c^2, \quad \alpha = \delta.$$

.17

- Un rayo de luz parte en $t = 0$ hacia $+\hat{y}$: $y = \sqrt{c^2 - u^2}t$ y $y' = ct'$. Con $y = y'$,

$$c(\epsilon u + \gamma) = \sqrt{c^2 - u^2}.$$

- Llegamos a

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - ut) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right)\end{aligned}$$

Donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}.$$

.18

3. Aplicaciones cinemáticas y efecto Doppler para la luz

3.1. Contracción de longitudes, dilatación de tiempos.

- Contracción de Lorentz.
- Dilatación del tiempo.
- Ejemplo: paradoja de la garrocha y del granero.

.19

3.2. Composición de velocidades

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v'_x = \frac{dx'}{dt'}$$

con

$$dx' = \gamma(dx - udt), dt' = \gamma\left(dt - \frac{udx}{c^2}\right),$$

tenemos

$$v'_x = \frac{dx - udt}{dt - \frac{udx}{c^2}} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, \quad y \quad (4)$$

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)} \quad (5)$$

.20

Ejemplos

- En un sistema S dos partículas se alejan del origen con velocidades $\pm 0,9c$. Calcular la velocidad relativa entre las partículas en S , y luego la velocidad relativa de las partículas entre ellas.
- Aberración de la luz.
- Distribución de estrellas vista por un viajero interestelar.
- Efecto luces delanteras.

.21

3.3. Efecto Doppler lumínico

- Para el sonido, en relatividad Galileana tenemos

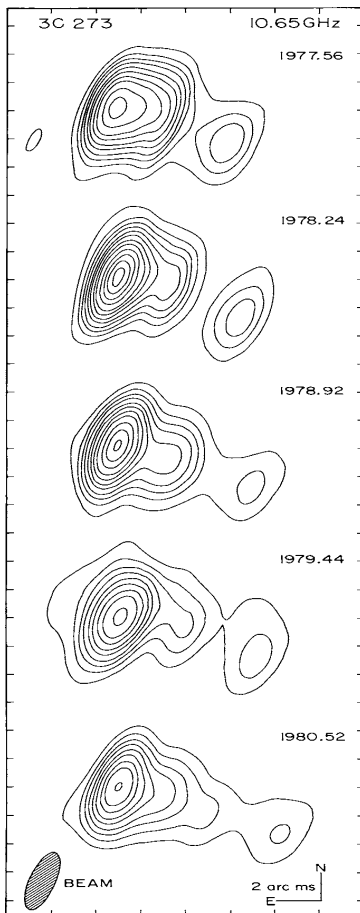
$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\vec{u} \cdot \hat{r}}{c_s}$$

- Para la luz, el efecto Doppler es análogo al sonido para $u \ll c$. En casos relativistas,

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \gamma \frac{\vec{u} \cdot \hat{r}}{c}$$

.22

Movimientos super-luminales aparentes



- Cuasar 3C273: $d = 440 \text{ Mpc}$, ($1\text{pc} \sim 3 \cdot 10^{18} \text{cm}$), $\mu = 8 \cdot 10^{-4} \text{''yr}^{-1}$. $\Rightarrow v_a = 5,6 c$.
- La velocidad de expansión real, \vec{u} , con una inclinación i , se relaciona con v_a mediante

$$v_a = \frac{u \sin(\phi)}{1 - (u \cos(\phi)/c)}$$

- Para 3C273, $u < c$ da $i > 69,6 \text{ deg}$.

.23

4. Espacio-tiempo

4.1. Notación tensorial y causalidad

Tiempo propio

- Consideremos dos eventos 1 y 2, observados en el origen de un sistema S' .

- El intervalo de tiempo propio entre dos eventos es el intervalo de tiempo entre los eventos en el sistema de referencia de un observador cuya línea de mundo pasa por los dos eventos.

.24

Intervalo relativista

$$I = (ct')^2 - (x')^2 = (ct)^2 - x^2 \Rightarrow I \text{ es invariante de Lorentz}$$

.25

Cuadrivectores

Cuadrivectores transforman con T.L.. Ejemplos:

- $$x^\mu = (x_1, x_2, x_3, ct) = (x_i, ct).$$

- $$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad a^\mu = \frac{dv^\mu}{d\tau}.$$

Ley de transformación: $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$, con

$$\Lambda^\mu_\nu = \gamma \begin{pmatrix} 1 & & & \beta \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -\beta & & & 1 \end{pmatrix}$$

.26

Norma de cuadrivectores

$$\|x^\mu\|^2 = \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} x^{\mu\nu}, \quad \text{con } \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|x^\mu\|^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

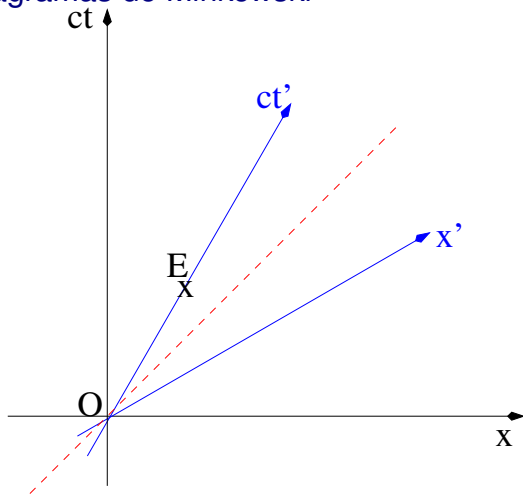
distancias 4-D:

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

.27

Diagramas de Minkowski

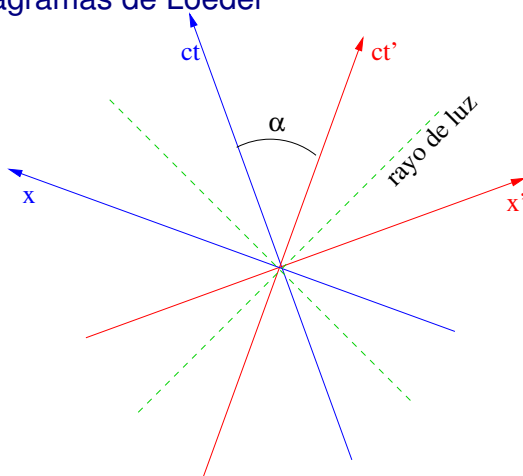


Para interpretar eventos en S' necesitamos aplicar un factor de escala a los ejes de S' ,

$$\gamma = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

.28

Diagramas de Loedel



(ref: ver “Special relativity”, Albert Shadowitz)

- Graficar eje \hat{ct} , y \perp a el, el eje x' .
- Graficar eje \hat{ct}' , formando un ángulo α con ct , tal que $\sin(\alpha) = v/c$.
- Graficar $\hat{x} \perp ct'$.

.29

5. Mecánica relativista

Debemos revisar la 2da ley de Newton porque no es invariante de Lorentz:

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = m \frac{d^2}{dt^2} \{ \gamma(x - ut) \} = m \gamma \frac{d^2 x}{dt^2}, \text{ con } \gamma(u) \text{ y } u \neq v.$$

.30

5.1. Acción, momentum y energía

Acción de la partícula libre.

La acción debe ser invariante de Lorentz, y se debe recuperar el límite Newtoniano para $(v/c) \ll 1$. Probamos con

$$\mathcal{S} = \alpha \int_a^b c d\tau, \text{ donde } \alpha \text{ es una propiedad de la partícula,}$$

τ es el tiempo propio de la partícula, y a y b son eventos en su línea de mundo. Escribamos S en un sistema de referencia S :

$$S = \alpha \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - (v/c)^2} c dt$$

$$\Rightarrow \text{el Lagrangiano es } L = \alpha c \sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

Si $(v/c) \ll 1$, $L \approx \alpha c (1 - \frac{1}{2}(v/c)^2)$, y pedimos

$$L = \frac{1}{2} m_0 v^2 \Rightarrow \alpha = -m_0 c.$$

.31

Momentum, energía y ecuaciones de movimiento

Tenemos entonces $L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - (v/c)^2}$, y el momentum es

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} v_i.$$

El Hamiltoniano da la energía de la partícula:

$$E = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \gamma m_0 c^2.$$

Notamos que en límite Newtoniano,

$$\lim_{(v/c) \ll 1} E \rightarrow \overbrace{m_0 c^2}^{\text{energía en reposo}} + \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

Ecuación de movimiento:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} p_i = 0.$$

.32

Derivación del momentum sin formalismo Lagrangiano

- idea:

$$\vec{p} = m(u) \vec{u} \text{ y } K = K(u), \text{ para una partícula con velocidad } \vec{u},$$

con requisito

$$\lim_{(v/c) \ll 1} m(u) \rightarrow m_0, \text{ masa Galileana.}$$

- Consideremos una colisión elástica entre dos pelotas P_1 y P_2 , idénticas, lanzadas con velocidad relativa $V \hat{y}$ por dos observadores O_1 y O_2 que se acercan con velocidad relativa $\vec{u} \parallel \hat{x}$.
- En un sistema estacionario (i.e. centro de masa), son iguales los ángulos θ que forman con el eje \hat{x} los vectores velocidades iniciales de las pelotas, \vec{u}_1^i y \vec{u}_2^i . Por simetría, también son iguales los ángulos después de la colisión.

.33

- Conservación de la energía:

$$K(u_1^i) + K(u_2^i) = K(u_1^f) + K(u_2^f),$$

y pidiendo

$$u_1^i = u_2^i, K(u^i) = K(u^f), \Rightarrow u^i = u^f.$$

- Definimos la interacción con $\theta_1^f = \theta_1^i$.
- Si para O_2 la velocidad es $\vec{v}_{P_2} = -V\hat{y}$, para O_1 la ley de composición de velocidades da $\vec{v}_{P_2} = -V/\gamma$, y la velocidad total de P_2 es $u_2 = \sqrt{(V/\gamma)^2 + u^2}$, con u velocidad relativa.
- Conservación de momentum para O_1 , según \hat{y} :

$$Vm(V) - m(u_2)V/\gamma = -Vm(V) + m(u_2)V/\gamma.$$

$$\Rightarrow m(V)\gamma = m(u_2) \text{ con } u_2 = \sqrt{(V/\gamma)^2 + u^2}. \quad (6)$$

con $V \rightarrow 0$, obtenemos $m(u) = \gamma(u)m_o$ (tarea: demostrar que es solución de Eq. 6).

.34

Derivación de $K(u)$

Definimos la fuerza con $\vec{F} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt}$, y el trabajo T con

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{x_f} F dx = \int_0^{t_f} F v dt = \int_0^{t_f} v \frac{dp}{dt} dt \\ &= \int_0^{p_f} v dp = v p \Big|_0^{p_f} - \int_0^{v_f} p dv \\ &= \frac{m_o v_f^2}{\sqrt{1 - v_f^2/c^2}} - \frac{m_o}{2} \int_0^{v_f} \frac{1}{\sqrt{1 - v_f^2/c^2}} dv^2 \\ &= \frac{m_o v_f^2}{\sqrt{1 - v_f^2/c^2}} + m_o c^2 \sqrt{1 - v_f^2/c^2} \Big|_0^{v_f}. \end{aligned}$$

.35

Finalmente,

$$T = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - v_f^2/c^2}} - m_o c^2 = E(v_f) - E(0).$$

Conservación de la energía $\Rightarrow K = T$. En el límite Newtoniano, $K = \frac{1}{2}mv^2$.
Escribimos

$$E(v) = T(v) + E(0),$$

para resaltar que $E(v)$ es la energía total de la partícula y que $E(0)$ es su energía en reposo.

.36

Relación energía-momentum

Tenemos entonces que la energía relativista de una partícula libre con velocidad \vec{v} es

$$E = m_0 \gamma c^2,$$

y que el momentum relativista es

$$\vec{p} = m_0 \gamma \vec{v}.$$

Verificar que se cumple

$$\boxed{E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4}.$$

.37

5.2. Transformación de momentum y energía

Consideremos una partícula con velocidad $\vec{v} = v\hat{x}$ en un sistema S , y velocidad $\vec{v}' = v'\hat{x}'$ en un sistema S' , con velocidad $\vec{u} = u\hat{x}$ relativo a S .

En S' tenemos

$$E' = m_0 \gamma(v') c^2, \text{ y } \vec{p}' = m_0 \gamma(v') \vec{v}'.$$

sustituyendo la ley de composición de velocidades, Eq. 4 y Eq. 5, podemos relacionar v' con v , para concluir que (tarea)

$$p'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} \left(p_x - \frac{u}{c} \frac{E}{c} \right), \text{ y}$$
$$E' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} (E - p_x u).$$

.38

4-V energía momentum

Comparando con la transformación del 4-V posición, vemos que tenemos un nuevo 4-V energía-momentum:

$$p^\mu = \left(p_x, p_y, p_z, \frac{E}{c} \right).$$

La norma de p^μ es

$$\|p^\mu\|^2 = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = \frac{E^2}{c^2} - p^2.$$

$\Rightarrow E^2 - p^2 c^2$ es invariante de Lorentz, y en un sistema en reposo, $\|p^\mu\|^2 = m_0^2 c^4$, o sea

$$\boxed{E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4}.$$

.39

5.3. Equivalencia masa-energía

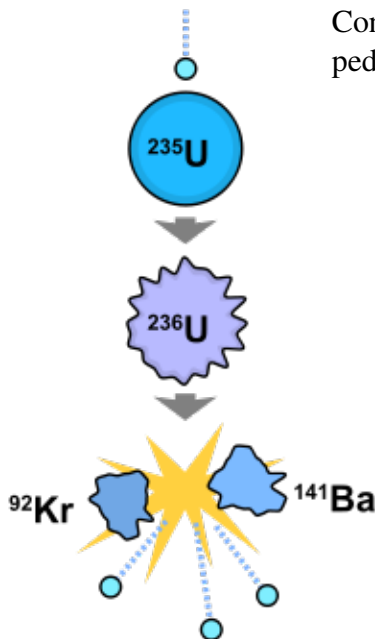
- Consideremos la siguiente colisión inelástica: dos partículas de masa $m(v)$ viajan en dirección opuesta a lo largo de \hat{x} , y chocan para formar una partícula de masa M . En el sistema CM, \mathcal{S} , la partícula producto estará inmóvil.
- La misma situación es vista desde otro sistema \mathcal{S}' en movimiento en dirección $-\hat{y}$ relativo a \mathcal{S} , con $u \ll c$ y $u \ll v$.
- Conservación de momentum, según \hat{y}' ,

$$2m(v)u = M(u)u \xrightarrow{u \rightarrow 0} M(0) = 2m(v).$$

- Vemos que $M(0)$ incluye la energía total de las partículas incidentes. Si estas tuviesen que perder energía cinética, por ejemplo en una interacción repulsiva $p-p$, entonces el producto incluye la energía potencial de las partículas (i.e. $E_{\text{total}} = E_{\text{kin}}(\infty)$).

.40

Ejemplo: fisión nuclear



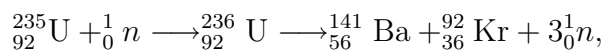
Consideremos la fisión de un núcleo de masa M en dos pedazos idénticos, con masa en reposo m_o .

- Cuando los pedazos frenan por colisiones con otros átomos, se ha liberado

$$\Delta E = (M - 2m_o)c^2 \text{ en el medio.}$$

- La diferencia entre M y $2m_o$ es la energía potencial de ligazón de M .

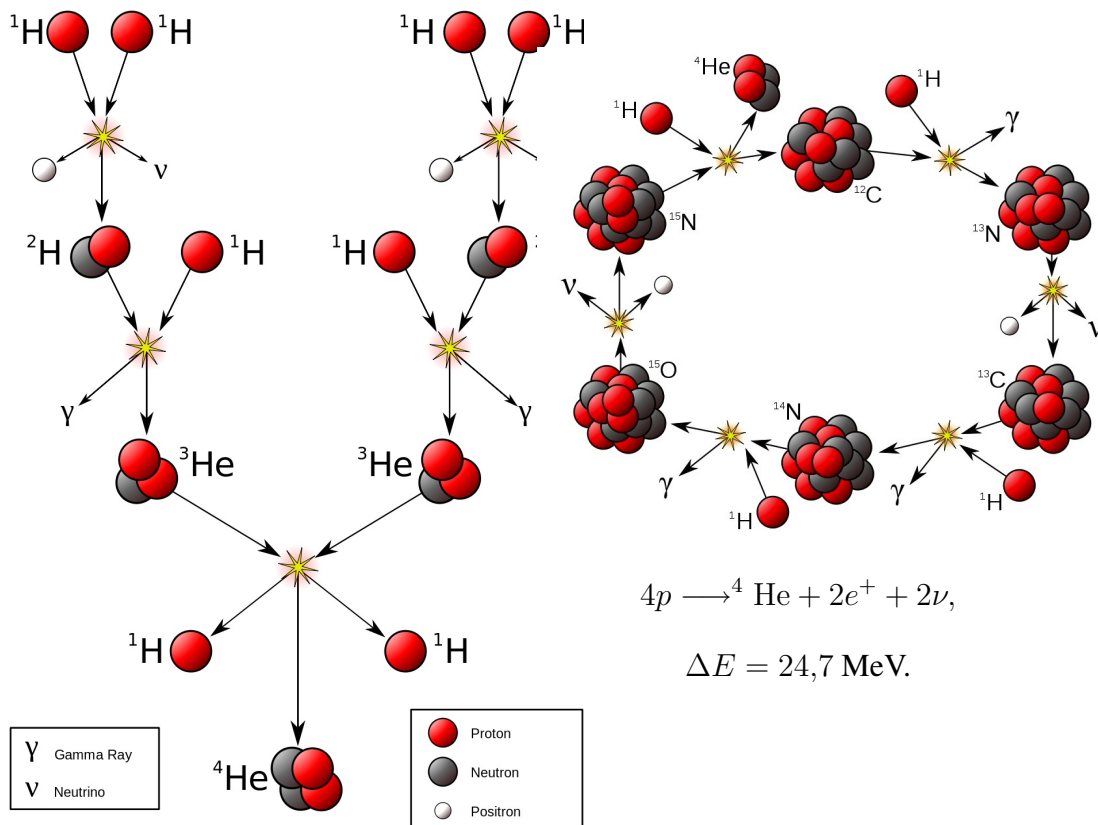
Un ejemplo concreto es la reacción en reactores de fisión,



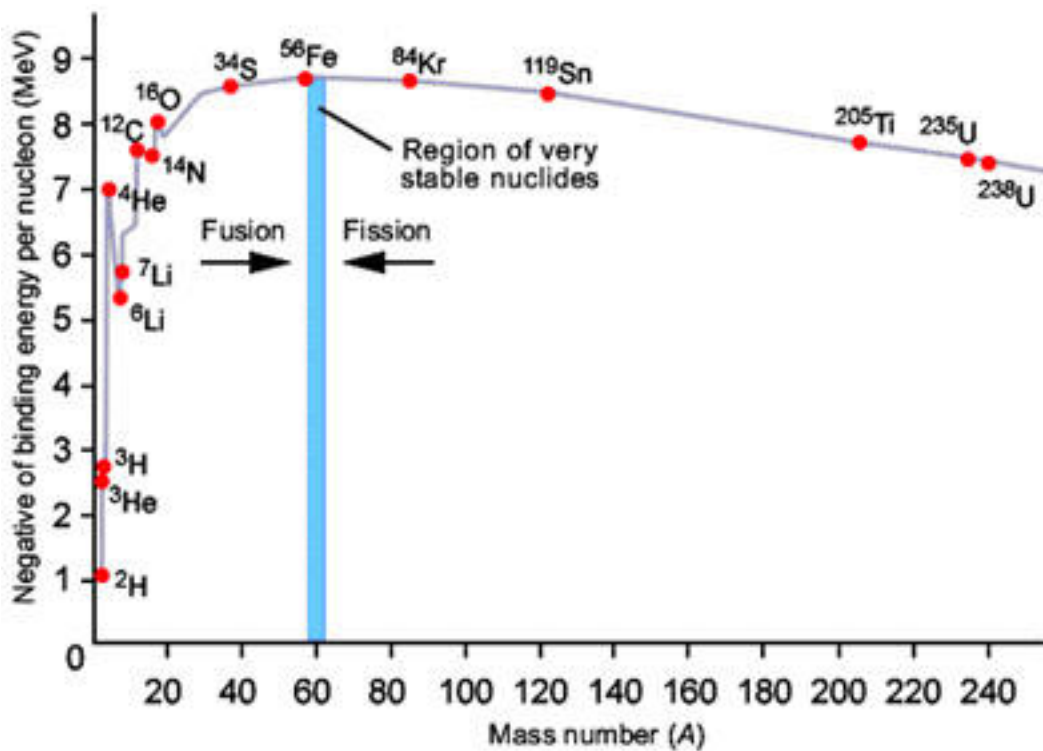
con $\Delta E = 185 \text{ MeV}$.

.41

Ejemplo: fusión nuclear



Ejemplo: nucleosíntesis



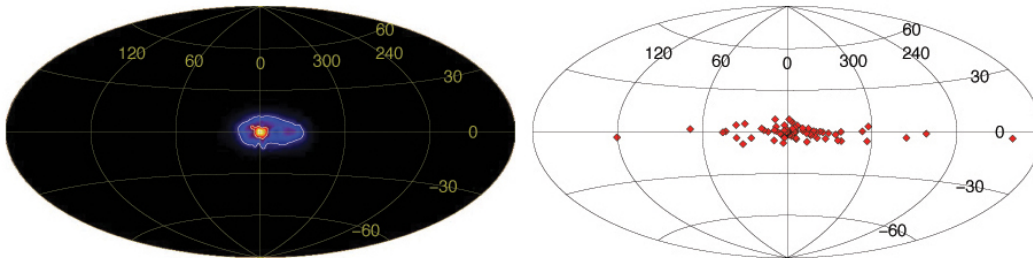
Ejemplo: energía umbral

- ¿ Cuánta energía esta disponible en un colisión?
- Para calcular la energía disponible hay que usar el sistema CM. En otros sistema la conservación de momentum impide convertir toda la energía cinética del sistema en masa de una nueva partícula.
- Para 2 partículas idénticas, $E_{CM} = \sqrt{2m_0c^2 E_{LAB}}$.

.44

Ejemplo: producción/anihilación de pares

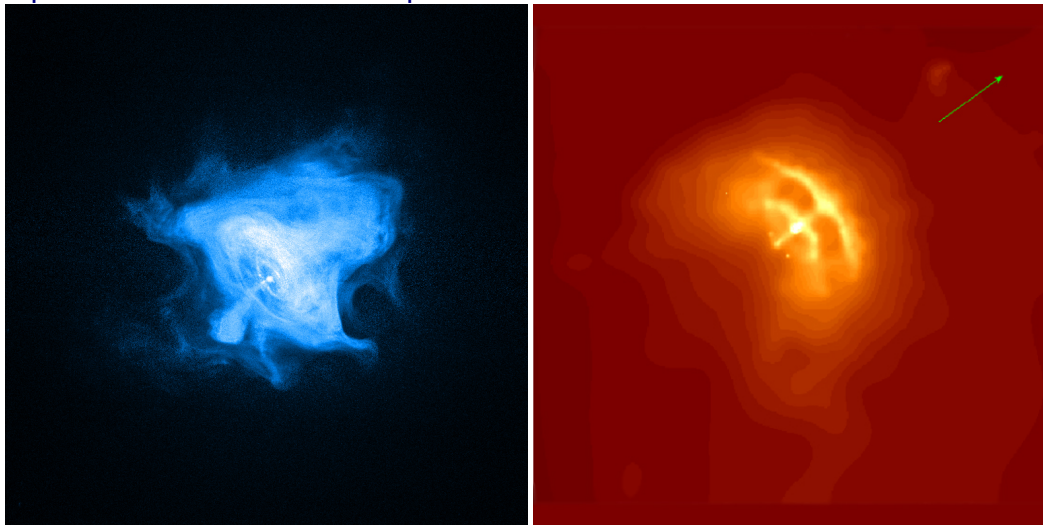
- $\gamma \longleftrightarrow e^+ + e^-$?
- Se necesitan $E_\gamma > 2m_e c^2 \sim 10^6$ eV, pero la reacción no conserva momentum \Rightarrow imposible en el espacio vacío.
- Sin embargo la producción/anihilación de pares se da en la vecindad de un tercer cuerpo, i.e. un núcleo atómico que absorba el exceso de momentum.



Integral press release: http://www.esa.int/esaSC/SEMKTIX2MDAF_index_0.html.

.45

Ejemplo: Vientos de electrones/positrones



Cangrejo

Vela X

.46