Propagación de ondas electromagnéticas en medios dispersivos: Paquetes de ondas y velocidad de grupo

1. Repaso

- Ecuación de ondas.
  En el vacío, las ecuaciones de Maxwell conducen a que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ satisfacen la ecuación de ondas, que se puede escribir genéricamente como:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

  donde ψ representa cada una de las componentes de $\vec{E}$ o $\vec{B}$. Las soluciones de Ec. 1 son funciones $Z(x \pm ct)$, o sea ondas propagandose hacia $+\hat{x}$ o $-\hat{x}$. En el caso de una perturbación finíta, podemos descomponer $Z(x-ct)$ en sus componentes espectrales:

$$Z(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(k)e^{i(kx-\omega t)}dk. \tag{2}$$

  En el vacío, la relación de dispersión (la ecuación que liga ω con k), es simplemente $\omega(k) = kc$. La onda se propaga sin deformarse con velocidad c hacia $+\hat{x}$. $f(k)$ es el espectro de la onda, que se puede ver como la superposicón de componentes monocromáticas.

- Gaussianas y transformadas de Fourier.
  La transformada de una gaussiana es otra gaussiana: Si

$$Z(x-ct) = Z_\circ \exp\left(-\frac{(x-ct)^2}{2\sigma^2}\right) = Z_\circ \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right), \tag{3}$$

  con $u = x - ct$, entonces

$$f(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z(u)e^{-iku}du = Z_\circ\sqrt{2\pi}\sigma \exp\left(-\frac{\sigma k^2}{2}\right), \tag{4}$$

  y $f(k)$ es otra gaussiana con dispersion $\sigma_k = 1/\sigma$.

2. Medio dispersivo

En los medio lineales y homogéneos, las ecuaciones de Maxwell se modifican y la ecuación de onda se reemplaza por la ecuación de propagación-absorpción, que es la ecuación de ondas con un término disipativo:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \gamma\mu\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0, \tag{5}$$

con $\epsilon\mu = 1/c_1^2$. Buscando soluciones en ondas planas monocromáticas ,

$$\psi = \psi_\circ \exp[i(kx - \omega t)], \tag{6}$$

obtenemos la relación del dispersión para el medio,

$$-k^2 + \epsilon\mu\omega^2 + i\omega\gamma\mu = 0. \tag{7}$$

Consideramos el caso en que la conductividad $\gamma = 0$, o sea medios aislantes (dielectricos, en los conductores las ondas son evanescentes). Si $\gamma = 0$ las soluciones del tipo Ec. 6 ya fueron estudiadas para la ecuación de ondas en el vacío. En el caso de los dielectrico, el índice de refracción depende generalmente de ω.

Pero soluciones como las ondas planas monocromáticas no son físicas (se extienden hasta ∞), y para describir perturbaciones localisadas formamos un paquete de ondas:

$$Z(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{i(kx-\omega t)} dk. \tag{8}$$

Claramente, es $\mathrm{Re}[Z(x,t)]$ que cobra sentido físico y que describe la onda. En un medio dispersivo las soluciones de la ecuación de propagación-absorpción son paquetes de ondas. Notar que $Z(x,t) \neq Z(x - c_1 t)$, porque $c_1 = c_1(k)$.

Como ejemplo, podemos formar un paquete de ondas que describa una gaussiana para $Z(x,t = 0)$ tomando un $f(k)$ que también sea gaussiano:

$$f(k) = \exp(-\alpha^2 (k - k_\circ)^2), \tag{9}$$

que es una gaussiana con dispersión $\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}$, y con la Ec. 8,

$$\begin{aligned} Z(x,0) &= \frac{1}{2\pi} e^{ik_\circ x} \int e^{ilx} e^{-\alpha^2 l^2} dl, \quad \text{con } l = k - k_\circ, \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{ik_\circ x} \int e^{-\alpha^2 (l - \frac{ix}{2\alpha^2})^2} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}} dl, \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{ik_\circ x} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}} \underbrace{\int e^{-\alpha^2 z^2} dz}_{\sqrt{\pi}/\alpha}, \quad \text{donde } z = l - \frac{ix}{2\alpha^2}, \end{aligned} \tag{10}$$

y finalmente

$$Z(x,0) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} e^{ik_\circ x} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}}, \tag{11}$$

o sea $\mathrm{Re}[Z(x,0)] = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} \cos(k_\circ x) e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}}$.

3. Velocidad de grupo

Si $f(k)$ es una función localisada en torno a $k_\circ$, podemos expandir a primer orden

$$\omega(k) \sim \omega(k_\circ) + (k - k_\circ) \left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right|_{k_\circ}. \tag{12}$$

Para ello, despreciamos $\frac{1}{2}(k - k_\circ)^2 \left.\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\right|_{k_\circ}$, lo cual es válido si la exponential decrece suficientemente rápido. O sea, requerimos

$$\begin{aligned} (k - k_\circ)^2 &< 2\sigma_k^2, \\ (k - k_\circ)^2 &\ll 2 \frac{1}{\omega(k_\circ)} \left.\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\right|_{k_\circ}, \end{aligned} \tag{13}$$

y vemos que la expansión Ec. 12 es válida sólo cuando

$$\sigma_k^2 \ll \frac{1}{\omega(k_\circ)} \left.\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\right|_{k_\circ}, \tag{14}$$

es decir cuando $f(k)$ es suficientemente angosta.

Con la expansion Ec. 12, el paquete de ondas Ec. 8, se escribe

$$Z(x,t) = \frac{1}{2\pi} e^{i(k_\circ x - \omega(k_\circ)t)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k_\circ + l) e^{il(x - v_g t)} dl, \tag{15}$$

en que definimos $l = k - k_\circ$ y la *velocidad de grupo*,

$$v_g = \left.\frac{\partial \omega}{\partial \omega}\right|_{k_\circ}. \tag{16}$$

Finalmente,

$$Z(x,t) = a(x - v_g t) e^{i(k_\circ x - \omega(k_\circ)t)}, \tag{17}$$

donde $a(x)$ es la envoltura en $t = 0$, que se propaga con v_g.

4. Dispersión del paquete de ondas

Si incluimos el término de segundo orden en la expansión Ec. 12,

$$\omega(k) \sim \omega(k_\circ) + (k - k_\circ) \left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right|_{k_\circ} + \frac{1}{2}(k - k_\circ)^2 \left.\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\right|_{k_\circ}, \tag{18}$$

tomamos $f(k) = \exp(-\frac{(k-k_\circ)^2}{2\sigma_k^2})$, después de un poco de cálculo obtenemos

$$Z(x,t) = \frac{1}{2\pi} e^{i(k_\circ x - \omega(k_\circ)t)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{l^2}{2}(\frac{1}{\sigma_k^2} + i\omega'' t)} e^{il(x - v_g t)} dl, \tag{19}$$

con $\omega'' = \left.\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\right|_{k_\circ}$. Definiendo $\frac{1}{\sigma_l^2} = \frac{1}{\sigma_k^2} + i\omega'' t$ y $u = x - v_g t$,

$$\begin{aligned}
Z(x,t) = &\ e^{i(k_\circ x - \omega(k_\circ)t)} \overbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dl\ e^{-\frac{l^2}{2\sigma_l^2}} e^{ilu}}^{\frac{\sigma_l}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{u^2}{2\sigma^2})}, \\
= &\ e^{i(k_\circ x - \omega(k_\circ)t)} \frac{e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma},\ \text{con} \\
\sigma^{-2} = &\ \frac{\frac{1}{\sigma_k^2} - i\omega'' t}{\frac{1}{\sigma_k^4} + (\omega'' t)^2}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Vemos que, si bien la expresión para $\mathrm{Re}[Z(x,t)]$ es complicada, hay una envoltura gaussiana con una dispersión que crece con el tiempo:

$$\mathrm{Re}[\sigma^2] = \frac{1}{\sigma_k^2} + (\omega'' t)^2. \tag{21}$$

En conclusión, el incluir el segundo orden en la expansión Ec. 12 pone en evidencia que al transcurir el tiempo, se enancha el paquete de ondas.