Problemas, Cuántica

1. Albedo del planeta Marte

Cuando el Sol, la Tierra y Marte están alineados en ese orden, observamos con un radio-telescopio que el flujo de radiación en la Tierra proveniente del planeta Marte, en $\lambda = 1\ cm$ (o sea $\nu = 30$ GHz), es $F(30\text{ GHz}) = 3.45\ 10^{-25}$ W m^{-2} Hz^{-1}. En este problema estudiaremos las consecuencias de suponer que Marte emite como cuerpo negro.

(a) Calcular el ángulo sólido Ω subtendido por Marte, visto desde la Tierra. (Respuesta: $\Omega = 5.9\ 10^{-9}$ sterad $= 252.8$ arcsec^2, 1 sterad = 1 rad^2.)

(b) $F_\nu = \Omega B_\nu$, en que B_ν es la función de Planck (la intensidad específica de un cuerpo negro es $B_\nu = 2h\nu^3/c^2 \left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right]$, y se expresa en W m^{-2} Hz^{-1} sterad^{-1}). Demuestre que si $h\nu \ll kT$, podemos usar la aproximación de Rayleigh-Jeans (R-J): $F_\nu = \Omega \frac{2}{c^2}\nu^2 kT$.

(c) Usando la aproximación de R-J, calcular la temperatura de Marte en base al flujo observado. (Respuesta: $T = 210$ K). Ver que se cumple $h\nu \ll kT$, y que a-posteriori podemos confiar en esta estimación.

(d) Suponga ahora que Marte absorbe todo la radiación proveniente del Sol, y que Marte emite toda la radiación que absorbe. Estimar nuevamente la temperatura de Marte. (Respuesta: $T = 225$ K).

(e) Vemos que la temperatura estimada en el punto anterior es ligeramente mayor que la temperatura de R-J, que es un resultado experimental. Para que calzen, parte de la radiación solar que llegua a marte debe ser dispersada. Sea el albedo $\omega = F_{\text{reflectado}}/(F_{\text{reflectado}} + F_{\text{absorbido}})$. Calcular ω para que calzen las temperaturas. (Respuesta: $\omega = 0.24$, el valor real es 0.15 – al igual que para la Tierra, en Marte existen estaciones y efecto invernadero que comprometen la aproximación cuerpo negro estacionario).

Datos: en el sistema MKS, luminosidad del Sol $L_\odot = 3.8\ 10^{26}$ W, distancia Sol-Marte $D = 1.52\ AU$, $1AU = 1.5\ 10^{11}$ m, radio de marte $R = 0.53\ R_\oplus$, radio de la Tierra $R_\oplus = 6400$ km, $k = 1.38\ 10^{-23}$ J K^{-1}, $c = 3\ 10^8$ m s^{-1}, 1 rad = 206265 arcsec, $\sigma = 5.67\ 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}, $h = 6.62\ 10^{-34}$ J s.

2. Decaímento del átomo de hidrógeno en su estado fundamental.

El átomo de hidrógeno es estable, y no irradía si está en su estado fundamental, cuando el electron ocupa el radio de Bohr. Pero la física clásica predice que toda carga acelerada emite radiación electromagnética.

(a) Estime numéricamente la vida media de un átomo de hidrógeno, usando herramientas de física clásica en el modelo atómico de Bohr (respuesta: 10^{-10} s, divida potencia emitida por energía disponible). Porque no calza con el experimento?

(b) Como resolvió este problema la mecánica ondulatoria de Schrödinger? Desarrolle los cálculos para el estado fundamental, y explique.

Datos: En el sistema MKS, $\epsilon_\circ = 8.85\ 10^{-12}$ F m^{-1}, $\mu_\circ = 4\pi\ 10^{-7}$ H m^{-1}, $e = 1.6\ 10^{-19}$ C, $c = 3\ 10^8$ m s^{-1}, $m_e = 9.1\ 10^{-31}$ kg, $\hbar = 1.05\ 10^{-34}$ J s.

3. El átomo de hidrógeno y el principio de incertidumbre.

Deduzca el radio de la orbita a del electron en el átomo de hidrogeno para el estado fundamental (que corresponde al mínimo de energía $E(a) = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_\circ a}$), usando el principio de incertidumbre en su caso límite, $\Delta p \Delta a = \hbar$, y $\Delta p \sim p$, $\Delta a \sim a$. (Respuesta: 0.53 Å). Usando este razonamiento, explique porque el principio de incertidumbre impide que el electrón pierda energía, y caiga hacia el núcleo, tal como lo calculó en el problema anterior en el tratamiento clásico.