FI34A-4 2007A **Control 2** Prof: Simón Casassus
14 de Mayo de 2007 3 h Ayudante: Daniel Asenjo

(Desarrolle sus respuestas y **cuide la presentación**. Sin calculadora.)

Propagación de ondas electromagnéticas en medios dispersivos

En los medio lineales y homogéneos, las ecuaciones de Maxwell se modifican y la ecuación de onda se reemplaza por la ecuación de propagación-absorción, que es la ecuación de ondas con un término disipativo:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \gamma\mu\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

en que ψ es cualquier componente de $\vec{E}$ o $\vec{B}$, $\epsilon\mu = 1/c_1^2$, y γ es la conductividad del medio. Estudiemos la propagación de una señal $\psi(x,t)$ usando su descomposición espectral:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(k)e^{i(kx-\omega t)}dk. \tag{2}$$

I Propagación de componentes monocromáticas individuales.

1. Describa cualitativamente la estructura general de una onda plana electromagnética (i.e. la relación en entre $\vec{E}$, $\vec{B}$, y $\vec{k}$), y los distintos modos de polarización de ondas monocromáticas.

2. Muestre que para que existan soluciones en ondas planas monocromáticas ,

$$\psi = \psi_\circ \exp[i(kx-\omega t)], \tag{3}$$

es necesaria la relación de dispersión del medio,

$$-k^2 + \epsilon\mu\omega^2 + i\omega\gamma\mu = 0. \tag{4}$$

3. Considere una onda monocromática proveniente del vacío en $x < 0$, e incidente sobre un medio conductor en $x > 0$, con $\gamma \to \infty$. Muestre que ψ es atenuada exponencialmente en el medio conductor, $\psi \propto \exp(-x/\delta)$, en que $\delta = \sqrt{2/(\gamma\mu\omega)}$.

4. Construimos un polarizador usando un material polaroide, con conductividad anisotrópica, de manera que $\gamma = 0$ si $\psi = E_y$, y $\gamma \to \infty$ si $\psi = E_z$. Si el espesor del polaroide es mucho mayor que su espesor de piel, ¿ Cuál es el estado de polarización de la onda emergente?

5. Juntamos 3 polarizadores para hacer el siguiente experimento. El primer y el tercer polarizador estan cruzados, i.e. sus ejes transmisores estan a 90° uno de otro. El polarizador del medio forma un ángulo θ con el primer polarizador. Si iluminamos el dispositivo con luz natural monocromática e vector de Poynting $S_\circ\hat{x}$, ¿ Cuál será el vector de Poynting de salida?

II Propagación de un paquete de ondas.

Consideramos el caso en que la conductividad $\gamma = 0$, o sea medios aislantes (dieléctricos, en los conductores las ondas son evanescentes). En el caso de los dieléctricos, c_1 depende generalmente de ω. En un medio dispersivo el paquete de ondas $\psi \neq \psi(x - c_1 t)$ porque $c_1(k)$. Estudiamos el caso de espectros Gaussianos,

$$f(k) = \exp(-\alpha^2(k - k_\circ)^2),$$

con dispersión $\sigma_k = 1/(sqrt2\alpha)$.

1. Muestre que, en $t = 0$,
$$\psi(x, 0) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} e^{ik_\circ x} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}}. \tag{5}$$

2. Explique porque, si
$$\sigma_k^2 \ll \left[\frac{1}{\omega(k_\circ)} \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k_\circ} \right]^{-1}, \tag{6}$$
o sea si $f(k)$ es suficientemente angosta en torno a $k_\circ$, entonces podemos expandir $\omega(k)$ a primer orden:
$$\omega(k) \sim \omega(k_\circ) + (k - k_\circ) \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_\circ}. \tag{7}$$

3. Muestre que, con la expansion Ec. 7, el paquete de ondas Ec. 2, se puede escribir como
$$\psi(x, t) = a(x - v_g t) e^{i(k_\circ x - \omega(k_\circ) t)}, \tag{8}$$
donde $a(x)$ es la envoltura en $t = 0$, que se propaga con $v_g = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_\circ}$, la velocidad de grupo.

4. Dispersión del paquete de ondas.
Incluimos ahora el término de segundo orden en la expansión Ec. 7,
$$\omega(k) \sim \omega(k_\circ) + (k - k_\circ) \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_\circ} + \frac{1}{2}(k - k_\circ)^2 \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k_\circ}. \tag{9}$$

   a) Muestre que
   $$\psi(x, t) = e^{i(k_\circ x - \omega(k_\circ) t)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dl \; e^{-\frac{l^2}{2\sigma_l^2}} e^{ilu}, \tag{10}$$
   en que $\frac{1}{\sigma_l^2} = \frac{1}{\sigma_k^2} + i\omega'' t$.

   b) Concluya que $\psi(x, t)$ tiene una envoltura Gaussiana con un una dispersión σ_x que crece con el tiempo,
   $$\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(2\alpha^2) + (\omega'' t/(2\alpha^2))^2}, \tag{11}$$
   o sea que la señal se dispersa.