FI34A-4 2007A

27 de Junio de 2007

Examen

3 h

Prof: Simón Casassus

Ayudante: Daniel Asenjo

(Desarrolle sus respuestas y **cuide la presentación**. Sin calculadora.)

I Intercambio de calor por radiación.

Queremos estimar la temperatura alcanzada al calentar un gas ideal con una lampara, y la magnitud de las pérdidas radiativas. Iluminamos un recipiente esférico conteniendo un gas ideal, con volumen V y área A, y ubicado en una camara de vacío.

1. `(3 pt)` Estime la temperatura T de una esfera de radio R de material cualquiera calentada sólo por una fuente puntual de radiación con luminosidad L, ubicada a una distancia d, y haga ver que T no depende de R. Explique en detalle todas las aproximaciones o suposiciones que use (ayuda: $F = \sigma\, T^4$, flujo emitido por un cuerpo negro).

2. `(3 pt)` Una vez alcanzada la temperatura del Punto 1 apagamos la luz y monitoreamos las variaciones de $T(t)$.

   a) ¿Cual es la potencia emitida por el cuerpo negro (o sea su luminosidad, la cantidad de energía emitida por unidad de tiempo)?

   b) Escriba una relación entre la variación de energía interna del sistema dE/dt y su luminosidad.

   c) La energía interna del sistema es dominada por la del gas ideal, $E_{\text{gas}} = 3/2NkT$. Calcule y grafique $T(t)$.

   d) La energía interna del gas de fotones ya no es despreciable (como es el caso en una estrella), $E_{\text{rad}} = aVT^4$. Obtenga $T(t)$.

II Desarrollo histórico de la teoría del átomo de hidrógeno

1. Explique en qué consitió el experimento de Rutherford, y su importancia en estructura atómica.

2. Describa dos experimento claves para el establecimiento de $E = h\nu$.

3. ¿ Por qué para un fotón $p = \hbar k$?

4. De Broglie supuso que $E = h\nu$ y $p = \hbar k$ tambien se aplica al electrón del átomo de hidrógeno, y asoció una onda con el electrón. Demuestre que esto implica que el momemtum angular del electron está cuantisado, $L = n\hbar$.

5. En mecánica clásica el electrón tiene energía $E(a) = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_\circ a}$. Usando $L = n\hbar$, y $mv^2/r = e^2/4\pi\epsilon_\circ r^2$, demuestre que el radio a de la órbita del electrón correspondiente al nivel de energía mas bajo es: $a_\circ = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_\circ}{e^2 m}$, el radio de Bohr.

6. Usando el principio de incertidumbre en su caso límite, $\Delta p \Delta a = \hbar$, y $\Delta p = p$, $\Delta a = a$ (o sea $p = \hbar/a$, no olvide reemplazar p en $E(a)$), deduzca el radio a de la órbita del electrón para el estado fundamental (que corresponde al mínimo de energía, $dE(a)/da = 0$). Notar que se obtiene lo mismo que en la parte 5.

7. Explique brevemente porque debiera decaer el átomo de Bohr, según la física clásica, y porque la estabilidad del átomo de hidrógeno es consecuencia del principio de incertidumbre (o sea ponga en palabras sus ecuaciones).

III Principio de incerteza

En este problema examinos las consecuencias de la dualidad onda-particula. Asociamos una onda $\psi(x,t)$ a un electron tal que la probabilidad de encontrar a un electron entre x y $x+dx$ es $\rho(x)dx = \psi\psi^* dx$. La longitud de onda asociada a un momentum p es $\lambda = h/p$, y su frecuencia es $\nu = h/E$, en que E es su energía total.

1. `(6 pt)` Incerteza posición-momentum.

   a) Consideramos un electron viajando en direccion $+\hat{x}$, con un momentum determinado p. Escriba la onda ψ asociada a este electron, y su densidad de probabilidad $\rho(x)$.

   b) ¿Qué puede decir de la posición de un electrón con momentum p? Explique porque se dice que un electrón con momentum p esta deslocalizado.

   c) En la práctica un electrón tiene un momentum $p \pm \sigma_p$, y es descrito por un paquete de ondas:
   $$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon(k) \exp\left[i(kx - wt)\right],$$
   en que $k = 2\pi/\lambda = p/\hbar$. Consideramos por ejemplo un espectro Gaussiano, con una dispersion σ_k. Escriba $\rho(x)$, y concluya que es una Gaussiana con dispersion σ_x. ¿Existe una relación entre σ_x y σ_k?

   d) Dado una incerteza σ_p en el momentum, ¿cuál es la incerteza en su posición?

2. `(opcional)` Incerteza tiempo-energía.

   a) Consideramos ahora un electrón libre con una energía cinética determinada, $E = p^2/(2m)$. Escriba la onda ψ asociada a este electron, y su densidad de probabilidad $\rho(x,t)$.

   b) Observamos el paso del electrón por $x = 0$. Explique porque si E esta determinada (es decir con incerteza $\sigma_E = 0$), entonces no se sabe cuando el electrón pasará por $x = 0$.

   c) Si la densidad de probabalidad del paso del electron por $x = 0$ es una Gaussiana con dispersión σ_t, que puede decir de σ_E?

   Note que un corrolario del principio de incerteza tiempo-energía es que se puede violar conservación de la energía durante un tiempo corto $\rightarrow$ se pueden crear partículas del vacío.