(Desarrolle sus respuestas y **cuide la presentación**. Sin calculadora.)

Ř elaciones Utiles: Transformaciones de Lorentz, $x' = \gamma(x - ut)$, $t' = \gamma(t - ux/c^2)$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$.

I Paradoja de los gemelos.

Considere dos gemelos A y B. A se queda en la Tierra mientras B viaja en un cohete a una estrella a una distancia d, con velocidad v, y vuelve a juntarse con A. En este problema queremos comparar las duraciones del viaje según A y B, T_A y T_B.

1. (`1.5pt`) En relatividad especial, desde el punto de vista de A, ¿ Cuál es la relación entre T_A y T_B? ¿ Cuál de los gemelos habra envejecido más? Haga ver que la situación es paradojica porque B concluye el opuesto.

2. (`2.5pt`) Intentamos resolver la paradoja usando señales de luz para monitorear el viaje de B. Sean S y S' los sistemas de referencia inerciales ligados a A y B, con origenes coincicentes en $t = t' = 0$. Durante toda la travesía A manda señales a B cada τ segundos, a traves de rayos de luz. El número total de señales emitidas por A es $N_A = T_A/\tau$.

   a) Demuestre que B recibe las señales con un período dado por

   $$\tau' = \tau\sqrt{\frac{c + v_\circ}{c - v_\circ}}, \tag{1}$$

   que es la fórmula para el efecto Doppler relativista.
   Ayuda: puede usar un diagrama de Loedel correspondiente a la situación del viaje de ida, y dibuje dos rayos de luz, uno partiendo del orígen en $t = 0, x = 0$ (cuando los dos sistema S y S' coinciden, o sea donde las líneas de mundo de A y de B se cruzan), y otro partiendo de $(t = \tau, x = 0)$ (o sea en la linea de mundo de A), y ver donde el segundo rayo de luz intercepta la linea de mundo de B (o sea el evento $(x' = 0, t' = \tau')$ en la linea de mundo de B correspondiente a la recepción de la señal). Se relacionan τ y τ' usando un poco de geometría euclideana.

   b) Cuantas señales N_B recibe B en total, hasta su vuelta a la tierra, o sea sumando las de ida y las de vuelta?

   c) Igualar N_A y N_B (el número de caracteres recibido por B debe ser igual al número de caracteres enviado por A), y deducir la relación entre T_A y T_B. Al encontrarse nuevamente A y B, quién será el más viejo?

   d) Considere ahora la situación inversa: B envía las señales con un período τ', y $N_B = T_B/\tau'$.

      1) Cual es el período τ de recepción de las señales cuando A ve que B se aleja? Y cuando A ve que B se acerca?
      Ayuda: escribir la Ecuación 1, sin volver a deducirla, para el caso en que la fuente esta en B y la recepción en A.

      2) Como B se aleja de A con velocidad contante $v_\circ$, para A la estrella se encuentra a una distancia $\frac{1}{2}v_\circ T_A$. Explicar porque A **ve** a B alejarse durante $\frac{1}{2}T_A + \frac{1}{2c}v_\circ T_A$. ¿ Durante cuanto tiempo A **ve** a B acercarse?

3) Igualar N_A y N_B, y mostrar que se recuperan las mismas conclusiones que si A emite las señales. Concluya críticamente.

3. (`2.0pt`) En realidad el sistema de B no puede siempre ser inercial puesto que debe acelerar para darse la vuelta. Aqui tomamos en cuenta la dilatación gravitacional del tiempo.

   a) Considere un cohete de altura h, equipado de un reloj en su techo, que dispara fotones con período τ hacia un observador O en el piso del cohete. El cohete acelera hacia arriba a $\vec{g}$.

   1) Durante el tiempo que demora un fotón en atravesar la altura del cohete, h/c, O adquiere una velocidad v respecto al sistema inercial instantáneamente ligado al cohete en el evento de emisión. Si $v/c \ll 1$, mostrar que el efecto Doppler da $\Delta\tau/\tau = (\tau_O - \tau)/\tau = gh/c^2$, en que τ_O es el período de recepción de fotones en O.
   2) Usando el principio de equivalencia, explique la conclusión de O que el reloj del cohete adelanta, con $\Delta\tau/\tau = \Delta\phi/c^2$, en que $\Delta\phi$ es la diferencia de potencial gravitacional entre techo y piso.

   b) Analizamos ahora la paradoja de los gemelos desde el punto de vista del sistema ligado a B. Hay tres etapas, la ida, el retorno, y la vuelta. Muestre que en el límite $v/c \ll 1$, en los tramos inerciales de ida y de vuelta la diferencia de tiempo transcurrido desde la partida es $t_A - t_B = -vd/c^2$.

   c) Entre la ida y la vuelta está la fase crucial del retorno que dura $gt_{\text{ret}} = 2v$, cuando el sistema de B es no-inercial y acelera a $\vec{g}$. Use el principio de equivalencia (punto $3a1$) para concluir que en total la diferencia de tiempo $t_A - t_B = vd/c^2$, y que para $v/c \ll 1$ está en acuerdo con el cálculo en relatividad especial desde el punto de vista de A.

II Desarrollo histórico de la relatividad especial.

1. (`1pt`) ¿ Cuál es la primera evidencia histórica de que la velocidad de la luz es finita?

2. (`1pt`) ¿ Qué es la teoría del eter? Describa la primera evidencia experimental que invalidó la teoría del eter, y que demostró empíricamente que la velocidad de la luz es una constante.

3. (`1pt`) Enuncie el principio de relatividad especial, y explique porque invalida las transformaciones de Galileo.

4. (`1pt`) En base a las transformadas de Lorentz deduzca las leyes de composición de velocidades, y haga ver que c es un límite superior para la velocidad de un cuerpo material.

5. (`2pt`) Demuestre que para conservar causalidad, es necesario que c sea una límite estricto para la velocidad de una cuerpo material (si quiere puede usar un diagrama de Loedel).