FI34A-3 2008A — **Control 3** — Prof: Simón Casassus

2 de Junio de 2008 — 3 h — Ayudante: Pablo Castellanos

(Desarrolle sus respuestas y **cuide la presentación**. Sin calculadora.)

Relaciones útiles:

Fórmula de Larmor:

$$P_{\rm tot} = \frac{1}{6\pi c}\mu_\circ \left\| \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{d} \right\|^2 ,$$

con $\mu_\circ = 4\pi\, 10^{-7}$, y $\vec{d} = \sum_i q_i \vec{r}_i$ es el dipolo eléctrico asociado a un conjunto de cargas q_i.
$\hbar = 6{,}62\ 10^{-34}/2\pi$ J s^{-1}. La fuerza de Lorentz es $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$, en que $\nabla\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$.

I Interferencias radio.

1. Consideramos una antena formada por una barra conductora vertical de largo 1 m, conectada a una corriente alterna con intensidad de 3A y frecuencia de 1MHz.

   a) `(1 pt)` ¿Qué quiere decir ‘emitir radiación electromagnética? ¿Por qué la barra irradía? ¿A que frecuencia emite? ¿ En que dirección dirección es máximo el vector de Poynting?

   b) `(1 pt)` Indique el modo de polarización de la radiación (ayuda: considere la dirección del campo eléctrico resultante).

   c) `(1 pt)` Calcule la potencia total emitida por la antena. Explique en detalle los límites de validez de las relaciones que use.

2. Un ingeniero a cargo de telecomunicaciones nota que no logra suficiente potencia para tener señal en todo el área requerida. Como la intensidad y frecuencia de la antena son fijas, decide aumentar el numero de antenas, y parte colocando una segunda antena separada en 10m de la primera e idéntica a ella. Luego se aleja 1 km, y pone a prueba su sistema. Observa que al desplazarse a veces tiene mucho mas señal de la que esperaba, y a veces nada. Confundido, el ingeniero se decide a explicar el fenómeno *ab initio.*

   a) `(1 pt)` Introduzca un sistema de coordenadas adecuado, y calcule la superposición de los campos eléctricos producidos por las 2 antenas. ¿Cuál es el voltaje inducido en la antena que el ingeniero usa de detector, si esta mide 0.05 m?

   b) `(1 pt)` Explique porque el vector de Poynting observado en mediciones prácticas es su promedio temporal, y que$\langle S\rangle = \frac{1}{2}\epsilon_\circ c^2 \vec{E}\times\vec{B}^*$. Justifique que para una onda plana, $\vec{S} = \frac{1}{2}\epsilon_\circ c\|\vec{E}\|^2$.

   c) `(1 pt)` Calcule $\|\vec{S}\|$ en función de la posición del ingeniero. Puede suponer que la distancia entre las antenas y el ingeniero es mucho más grande que entre ellas, y que el ingeniero se encuentra cerca de la mediatriz a la dos antenas.

   d) *Pregunta optativa.* El éxito de su cálculo no impidió que el ingeniero quedara despedido por el gasto innecesario en una segunda antena. Ahora que tiene tiempo, se le antoja calcular el patrón de interferencias por N antenas (*ayuda: reconozca una serie geométrica en la sumatoria de los N campos eléctricos*).

II Dispersión de Rayleigh.

Consideramos una onda plana monocromática con campo eléctrico $\vec{E} = \vec{E}_\circ \exp\left[i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)\right]$ que incide sobre una partícula neutra (por ejemplo un átomo). Modelamos las pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio de la partícula con un oscilador armónico de frecuencia natural $\omega_\circ$. La onda incidente induce un dipolo $+q, -q$ en la partícula. En un estado estacionario, la posición de la carga negativa, con masa m, es $\vec{x_1} = \vec{x_\circ}\exp(-i\omega t)$, mientras que la carga positiva $+q$ se encuentra fija en el origen de coordenadas.

1. `(1.5 pt)` La onda acelera la carga $-q$ y le entrega energía contínuamente. Para evitar que la energía de las oscilaciones diverga es necesario que exista amortiguamiento radiativo, $\vec{F_R} = -\gamma\dot{\vec{x_1}}$, en que γ es una constante.

   a) Supondremos que las pequeñas oscilaciones son no-relativistas: $\|\dot{\vec{x_1}}\|/c \ll 1$. Muestre que $\|\vec{v}\times\vec{B}\| \ll \|\vec{E}\|$.

   b) Escriba la ecuación de movimiento de la carga $-q$.

   c) Demuestre que su solución es $\vec{x_\circ} = \frac{q}{m}\vec{E_\circ}/(\omega^2 - \omega_\circ^2 + i\omega\gamma)$.

2. `(1.5 pt)` Calculemos el coeficiente γ.

   a) Escriba el dipolo correspondiente a las pequeñas oscilaciones de las cargas. Si $\lambda = 2\pi c/\omega \ll \|\vec{x_\circ}\|$, escriba una expresión para la potencia total P_T emitida por la partícula en función de $\|\ddot{\vec{x_1}}\|^2$.

   b) Identifique $\langle -P_T\rangle$ con la potencia de amortiguamiento radiativo $\langle F_R \cdot \dot{\vec{x_1}}\rangle$, en que $\langle\rangle$ indica un promedio temporal, para obtener que $\vec{F_R} = \mu_\circ q^2 \dddot{\vec{x_1}}/(6\pi c)$ (ayuda: demuestre usando integración por partes que $\langle\|\ddot{\vec{x_1}}\|^2\rangle = -\langle\dddot{\vec{x_1}}\cdot\dot{\vec{x_1}}\rangle$. Note que diferimos la toma de partes reales).

   c) Muestre que $\gamma = \frac{2}{3} r_q \omega^2/c$, en que $r_q = q^2/(4\pi\epsilon_\circ m c^2)$, y $\epsilon_\circ\mu_\circ = c^{-2}$.

3. `(1 pt)` Definimos la sección eficaz $\sigma = \langle P_T\rangle/S$, en que $S = \frac{1}{2}c\epsilon_\circ E_\circ^2$ es el módulo del vector de Poyting incidente. Usando el Punto 1*c* muestre que

$$\sigma = \frac{q^2}{cm\epsilon_\circ}\frac{\gamma^2\omega^2}{(\omega^2-\omega_\circ^2)^2 + \omega^2\gamma^2}.$$

   Ayuda: para calcular $\langle P_T\rangle$ muestre que $\left\langle \left\|\mathrm{Re}\left[\ddot{\vec{x_1}}\right]\right\|^2\right\rangle = \frac{1}{2}\ddot{\vec{x_1}}\cdot\ \ddot{\vec{x_1}}^*$.

4. `(2 pt)` Particularisamos ahora al caso de dispersión de luz solar en la atmosféra terrestre. Para que la carga $-q$ quede ligada a los átomos es necesario que $\omega \ll \omega_\circ$.

   a) Muestre que entonces

$$\sigma \approx \frac{8\pi}{3} r_q^2 \frac{\omega^4}{\omega_\circ^4}.$$

   b) Explique el color del cielo y del atardecer.