

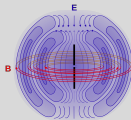
Electrodinámica

Simon Casassus

Astronomía, Universidad de Chile

<http://www.das.uchile.cl/~simon>

- I Electroestática, Magnetostática
- II Ondas Electromagnéticas y radiación



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Potenciales retardados

Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de
Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas

Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de
Rayleigh

Scattering por N blancos

Difracción

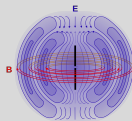
Relatividad

Cuadrivectores

Covarianza en
electrodinámica

Parte II

Ondas electromagnéticas y radiación



Ondas electromagnéticas

- Ecuaciones de Maxwell
- Potenciales retardados
- Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

- Descomposición Espectral
- Polarización
- Relaciones constitutivas
- Relaciones de Kramers-Kronig
- Propagación en un medio

Radiación

- Zona de ondas
- Radiación dipolar

Scattering y difracción

- Scattering en régimen de Rayleigh
- Scattering por N blancos
- Difracción

Relatividad

- Cuadrivectores
- Covarianza en electrodinámica

Plan

1 Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Potenciales retardados

Teorema de Poynting

2 Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de Kramers-Kronig

Propagación en un medio

3 Radiación

Zona de ondas

Radiación dipolar

4 Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh

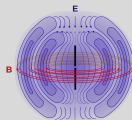
Scattering por N blancos

Difracción

5 Relatividad

Cuadrivectores

Covarianza en electrodinámica



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Potenciales retardados

Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas

Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh

Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

Cuadrivectores

Covarianza en electrodinámica

1.1 Corriente de desplazamiento

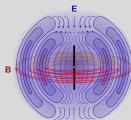
- La continuidad para la densidad de carga ρ se escribe $\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot \vec{J} = 0$.
- Pero tomando divergencia de la ley de Ampère

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{H}}_{\vec{J}} \right) = 0,$$

y tenemos una inconsistencia en el caso dinámico.

- Arreglamos la Ley de Ampère sumando la *corriente de desplazamiento* $\partial\vec{D}/\partial t$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \longrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Potenciales retardados

Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de
Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas

Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de
Rayleigh

Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

Cuadrivectores

Covarianza en
electrodinámica

1.1 Ecuaciones de Maxwell

- En resumen, las ecuaciones que describen la electrodinámica son:

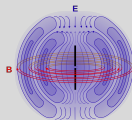
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (4)$$

- Para medios lineales, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ y $\vec{B} = \mu \vec{H}$.
- En el vacío, $\epsilon = \epsilon_0$ y $\mu = \mu_0$.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

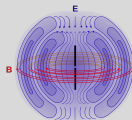
Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

1.1 Potenciales en electrodinámica

- Como $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$, seguimos con $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.
- Para \vec{E} , tomamos Ec. 3,

$$\vec{\nabla} \times \underbrace{\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)}_{\equiv -\vec{\nabla} \phi} = 0, \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

1.1 Ecuaciones para potenciales

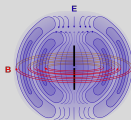
- Queremos escribir las ecuaciones que rigen los potenciales \vec{A} y Φ .
- Usando las Ecuaciones de Maxwell en vació (para conectar directamente con \vec{E} y \vec{B}), tenemos,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (5)$$

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu_0} \vec{B} = \vec{J} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow$$
$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \underbrace{\vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)}_{\text{término para Condición de Lorentz}} = -\mu_0 \vec{J}. \quad (6)$$

- Vemos que si el término destacado en Ec. 6 se anula, que sería la *Condición de Lorentz*, recuperamos la ecuación de ondas para \vec{A} :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (7)$$



Ondas
electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de
Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de
Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en
electrodinámica

1.1 Ecuaciones para potenciales

- Con la condición de Lorentz (Ec. 7),

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (8)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}. \quad (9)$$

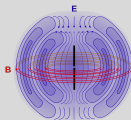
- Para cumplir la condición de Lorentz, usamos la libertad de Gauge:

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda, \quad (10)$$

que deja invariante $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

- Para preservar también $\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \partial \vec{A} / \partial t$, es necesario que

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}. \quad (11)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Potenciales retardados

Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de
Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas

Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de
Rayleigh

Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

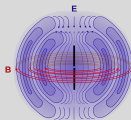
Cuadrivectores

Covarianza en
electrodinámica

1.1 Ecuaciones para potenciales

- Si tenemos \vec{A} y Φ que cumplen con las ecuaciones para potenciales en general (Ecs. 6 y 5), pero no cumplen la condición de Lorentz, podemos entonces buscar un $\Lambda(\vec{x}, t)$ tal que \vec{A}' y Φ' cumplan la condición.
- Inyectando Ecs. 10 y 11 en Ec. 7, llegamos a una ecuación para $\Lambda(\vec{x}, t)$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0. \quad (12)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadriectores
Covarianza en electrodinámica

Plan

1 Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Potenciales retardados

Teorema de Poynting

2 Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de Kramers-Kronig

Propagación en un medio

3 Radiación

Zona de ondas

Radiación dipolar

4 Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh

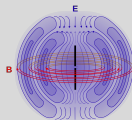
Scattering por N blancos

Difracción

5 Relatividad

Cuadrivectores

Covarianza en electrodinámica



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Potenciales retardados

Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas

Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh

Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

Cuadrivectores

Covarianza en electrodinámica

1.2 Ecuación de Helmholtz

- Para poder determinar $\vec{A}(\vec{x}, t)$ y $\Phi(\vec{x}, t)$, debemos resolver la ecuación de ondas con términos fuentes. Para un campo genérico $\Psi(\vec{x}, t)$:

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\vec{x}, t). \quad (13)$$

- Es conveniente pasar al dominio de Fourier en tiempo, para $g = \Psi$ $g = f$,

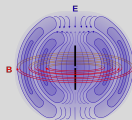
$$g(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (14)$$

con inversa,

$$g(\vec{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{x}, t) e^{i\omega t} dt. \quad (15)$$

- Usando la expansión Ec. 14 en Ec. 13, llegamos a la Ec. de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi(\vec{x}, \omega) = -4\pi f(\vec{x}, \omega). \quad (16)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Potenciales retardados

Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de
Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas

Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de
Rayleigh

Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

Cuadrivectores

Covarianza en
electrodinámica

1.2 Función de Green para la Ecuación de Ondas

- La Ecuación de Helmholtz Ec. 16 es muy parecida a la Ec.de Poisson, y podemos anticipar el uso de la misma maquinaria para resolverla. La función de Green satisface:

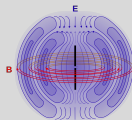
$$(\nabla^2 + k^2)G_k(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x}, \vec{x}'). \quad (17)$$

- Si cambiamos a un sistema con origen en \vec{x}' , vemos que la Ec. 17 tiene simetría esférica, y $G_k(\vec{x}, \vec{x}') = G_k(R)$, con $R = |\vec{R}|$ y $\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}'$
- La Ec. 17 se escribe entonces

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (R G_k) + k^2 G_k = -4\pi\delta(\vec{R}). \quad (18)$$

- Si $R \neq 0$, la solución de Ec. 18 es $RG_k = Ae^{ikR} + Be^{-ikR}$, donde las constantes A y B no depende de k . Para determinarlas, usamos el caso $k = 0$, Poisson, con solución $G_{k=0}(R) = 1/R$, $\rightarrow A + B = 1$.
- La solución general de Ec.18 se puede escribir

$$G_k(R) = AG_k^+(R) + BG_k^-(R), \text{ con } G_k^\pm = \frac{e^{\pm ikR}}{R} \\ \text{y } A + B = 1. \quad (19)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Potenciales retardados

Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de
Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas

Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de
Rayleigh

Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

Cuadrivectores

Covarianza en
electrodinámica

1.2 Función de Green para la Ecuación de Ondas

- Los valores de A y B dependen de las condiciones iniciales o de las condiciones de borde en el tiempo. Para verlo, volvemos al eje de tiempo y generalizamos la Ec. 17:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2}\right) G^\pm(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta(t - t'). \quad (20)$$

- Ahora, volviendo al eje de frecuencias ω , generalizamos Ec. 17 a

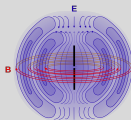
$$(\nabla^2 + k^2)G_k(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x}, \vec{x}')e^{i\omega t'}, \quad (21)$$

con soluciones $G_k^\pm(R)e^{i\omega t'}$.

- Para volver nuevamente al eje de tiempo, usamos Ec. 14, y

$$G^\pm(R; t, t') = G^\pm(R, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{\pm ikR - i\omega\tau}}{R} d\omega,$$

con $\tau = t - t'$.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Potenciales retardados

Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de
Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas

Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de
Rayleigh

Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

Cuadrivectores

Covarianza en
electrodinámica

1.2 Función de Green para la Ecuación de Ondas

- Para un medio no dispersivos (con $\omega/k = c$), finalmente llegamos a

$$G^{\pm}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \frac{\delta\left(t' - \left[t \mp \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right]\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (22)$$

- Aplicamos esta función de Green para encontrar las soluciones genéricas de Ec. 13:

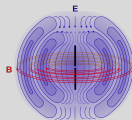
$$\Psi^{\pm}(\vec{x}, t) = \int d^3x' dt' G^{\pm}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') f(\vec{x}', t'). \quad (23)$$

- El caso $+$ corresponde a la solución retardada, con condición de entrada (válida antes de que f se active) ψ_{in} :

$$\Psi(\vec{x}, t) = \Psi_{\text{in}}(\vec{x}, t) + \int d^3x' dt' G^{+}(\vec{x}, t; \vec{x}', t'), \quad (24)$$

mientras que el caso $-$ corresponde a la solución adelantada, con condición de salida Ψ_{out} (después de que f se desactive),

$$\Psi(\vec{x}, t) = \Psi_{\text{out}}(\vec{x}, t) + \int d^3x' dt' G^{-}(\vec{x}, t; \vec{x}', t'), \quad (25)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Potenciales retardados

Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas

Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh

Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

Cuadrivectores

Covarianza en electrodinámica

1.2 Potenciales retardados

- Normalmente se usa la solución retardada, con condición inicial $\Psi_{\text{in}} = 0$, y en la notación compacta

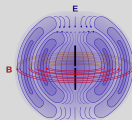
$$\Psi(\vec{x}, t) = \int d^3x' \frac{[f(\vec{x}', t')]_{\text{ret}}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (26)$$

donde $[(\dots)]_{\text{re}}$ significa evaluar en $t' = t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c$.

- Aplicando a los potenciales,

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{[\rho(\vec{x}', t')]_{\text{ret}}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (27)$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{[\vec{J}(\vec{x}', t')]_{\text{ret}}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (28)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Potenciales retardados

Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de
Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas

Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de
Rayleigh

Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

Cuadrivectores

Covarianza en
electrodinámica

1.2 Potenciales retardados

- Para calcular \vec{E} y \vec{B} , podemos usar $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ y $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.
- Alternativamente, usando las ecuaciones de Maxwell llegamos a (**tarea**):

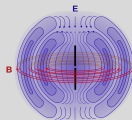
$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \left(-\vec{\nabla} \rho - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \right), \quad (29)$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{J}. \quad (30)$$

- Aplicando nuevamente las soluciones de la ecuación de ondas con fuentes, tenemos

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{1}{R} \left[-\vec{\nabla}' \rho - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t'} \right]_{\text{ret}}, \quad (31)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{1}{R} \left[\vec{\nabla}' \times \vec{J} \right]_{\text{ret}}. \quad (32)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Potenciales retardados

Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de
Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas

Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de
Rayleigh

Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

Cuadrivectores

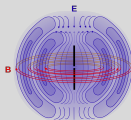
Covarianza en
electrodinámica

1.2 Potenciales retardados

- Las expresiones para los campos retardados Ecs. 31 y 33 se pueden escribir de una forma que conecta directamente con las expresiones estáticas (**tarea**):

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \left\{ \frac{\hat{R}}{R^2} [\rho(\vec{x}', t')]_{\text{ret}} + \frac{\hat{R}}{cR} \left[\frac{\partial\rho(\vec{x}', t')}{\partial t} \right]_{\text{ret}} - \frac{1}{c^2 R} \left[\frac{\partial\vec{J}}{\partial t} \right]_{\text{ret}} \right\} \quad (33)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \left\{ \left[\vec{J}(\vec{x}', t') \right]_{\text{ret}} \times \frac{\hat{R}}{R^2} + \left[\frac{\partial\vec{J}(\vec{x}', t')}{\partial t} \right]_{\text{ret}} \times \frac{\hat{R}}{cR} \right\} \quad (34)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Potenciales retardados

Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de
Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas

Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de
Rayleigh

Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

Cuadrivectores

Covarianza en
electrodinámica

Plan

1 Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Potenciales retardados

Teorema de Poynting

2 Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de Kramers-Kronig

Propagación en un medio

3 Radiación

Zona de ondas

Radiación dipolar

4 Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh

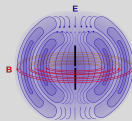
Scattering por N blancos

Difracción

5 Relatividad

Cuadrivectores

Covarianza en electrodinámica



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Potenciales retardados

Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas

Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh

Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

Cuadrivectores

Covarianza en electrodinámica

1.3 Teorema de Poynting

- Vimos que la potencia ejercida por el campo (\vec{E}, \vec{B}) sobre las cargas en un volumen \mathcal{V} es

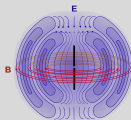
$$P = \int_{\mathcal{V}} \vec{J} \cdot \vec{E} d^3x. \quad (35)$$

- Queremos conectar P con la energía almacenada en los campos. Usando la Ec. de Ampère-Maxwell, despejamos \vec{J} , y luego de un manejo estandar,

$$P = \int_{\mathcal{V}} \left[-\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] d^3x. \quad (36)$$

- Usando ahora la Ley de Inducción (i.e. Faraday),
 $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$,

$$P = \int_{\mathcal{V}} \left[-\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] d^3x. \quad (37)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Potenciales retardados

Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de
Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas

Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de
Rayleigh

Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

Cuadrivectores

Covarianza en
electrodinámica

1.3 Teorema de Poynting

- Recordando que para un medio lineal $\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} \cdot \vec{B}$, y $\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \cdot \vec{D}$, llegamos a

$$P = \int_{\mathcal{V}} \vec{J} \cdot \vec{E} d^3x = - \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \right] d^3x, \quad (38)$$

donde reconocemos

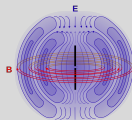
$$u = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}, \quad (39)$$

y

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (40)$$

- Para cualquier volumen \mathcal{V} , concluimos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{J} \cdot \vec{E}. \quad (41)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Potenciales retardados

Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de
Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas

Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de
Rayleigh

Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

Cuadrivectores

Covarianza en
electrodinámica

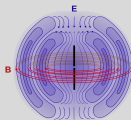
1.3 Teorema de Poynting

- De la misma manera que escribimos la continuidad de la energía electromagnética, Ec. 41, también podemos escribir la conservación de momentum lineal. La 2nda ley de Newton para la variación del momentum lineal $\delta\vec{p}_{\text{mec}}$ de un volumen $\delta\mathcal{V}$ se escribe:

$$\frac{d\delta\vec{p}_{\text{mec}}}{dt} = \rho\vec{E}\delta\mathcal{V} + \rho\vec{v} \times \vec{B}\delta\mathcal{V}. \quad (42)$$

- En total,

$$\frac{d\vec{p}_{\text{mec}}}{dt} = \int_{\mathcal{V}} d^3x(\rho\vec{E} + \rho\vec{v} \times \vec{B}). \quad (43)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Potenciales retardados

Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de
Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas

Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de
Rayleigh

Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

Cuadrivectores

Covarianza en
electrodinámica

1.3 Teorema de Poynting

- Reemplazando ρ y \vec{J} usando las ecuaciones de Maxwell, se llega a (tarea):

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_{\text{mec}} + \vec{p}_{\text{campos}})|_i = \sum_j \int_V d^3x \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad (44)$$

con las siguiente notaciones:

$$\vec{p}_{\text{campos}} = \int \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) d^3x = \frac{1}{c^2} \int d^3x \vec{S}, \quad (45)$$

que asociamos al momentum en los campos ya que cumple un rol parecido a \vec{p}_{mec} , y

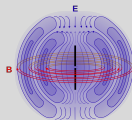
$$T_{ij} = \epsilon_0 \left[E_i E_j + c^2 B_i B_j - \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{E} + c^2 \vec{B} \cdot \vec{B}) \delta_{ij} \right], \quad (46)$$

que es el Tensor de tensiones electromagnéticas.

- Para cada componente i el integrando de T_{ij} se puede ver como una divergencia, y llegamos a

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_{\text{mec}} + \vec{p}_{\text{campos}})|_i = \oint_S \sum_j T_{ij} n_j dA, \quad (47)$$

donde reconocemos un flujo en la integral de superficie.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell

Potenciales retardados

Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de
Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas

Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de
Rayleigh

Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

Cuadrivectores

Covarianza en
electrodinámica

Plan

1 Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

2 Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

3 Radiación

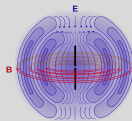
Zona de ondas
Radiación dipolar

4 Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

5 Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

2.1 Descomposición Espectral

- En ausencia de fuentes, si descomponemos

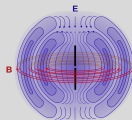
$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \vec{E}(\vec{x}, \omega) e^{i\omega t}, \quad (48)$$

las ecuaciones de Maxwell dan

$$(\nabla^2 + \mu\epsilon\omega^2) \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0. \quad (49)$$

- Si ϵ y μ son reales, las soluciones se escriben $e^{\pm ikx}$, con $k = \sqrt{\mu\epsilon}\omega$
- Definimos la velocidad de fase $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$, donde $n = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}}$ es el índice de refracción.
- Vemos que en general,

$$\begin{Bmatrix} E_i \\ B_i \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_i \\ \mathcal{B}_i \end{Bmatrix} e^{\pm i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}, \quad (50)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de
Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de
Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en
electrodinámica

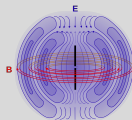
2.1 Descomposición Espectral

- Reconocemos la solución de d'Alembert,

$$\begin{Bmatrix} E_i \\ B_i \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_i \\ \mathcal{B}_i \end{Bmatrix} e^{\pm ik(\vec{n}\cdot\vec{x} - v_\phi t)}, \quad (51)$$

donde cada componente i es de la forma $f(\hat{n}\cdot\vec{x} - v_\phi t) + g(\hat{n}\cdot\vec{x} + v_\phi t)$, y donde reconocemos \hat{n} como la dirección de propagación.

- Usando las ecuaciones de Maxwell llegamos a (tarea) $\hat{n}\cdot\vec{\mathcal{E}} = 0$, $\hat{n}\cdot\vec{\mathcal{B}} = 0$ y $\vec{\mathcal{B}} = \frac{n}{c}\hat{n}\times\vec{\mathcal{E}}$.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

2.1 Descomposición Espectral

- Para campos armónicos es usual trabajar en notación compleja (debido a la descomposición espectral), de manera que $\vec{S} = \Re(\vec{E}) \times \Re(\vec{H})$.
- En general para productos del tipo

$$\Re(ae^{-i\omega t})\Re(be^{-i\omega t}) = \frac{1}{2}\Re(a^*b + abe^{-2i\omega t}), \quad (52)$$

se suele tomar promedio temporal

$\langle(\dots)\rangle_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^\infty (\dots) dt$, ya que

$$\langle\Re(ae^{-i\omega t})\Re(be^{-i\omega t})\rangle = \frac{1}{2}\Re(a^*b). \quad (53)$$

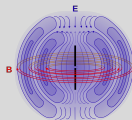
- Tenemos entonces

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}\vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}|\mathcal{E}|^2\hat{n}. \quad (54)$$

Y similarmente

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4}(\epsilon\vec{E} \cdot \vec{E}^* + \frac{1}{\mu}\vec{B} \cdot \vec{B}^*) = \frac{\epsilon}{2}|\mathcal{E}|^2. \quad (55)$$

- Finalmente, $\langle\vec{S}\rangle = v_\phi u$.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de
Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de
Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en
electrodinámica

Plan

1 Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

2 Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

3 Radiación

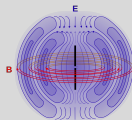
Zona de ondas
Radiación dipolar

4 Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

5 Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

2.2 Polarización

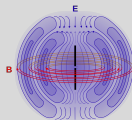
- En resumen, el campo eléctrico en una onda monocromática se decompone en dos ondas polarizadas linealmente,

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = (\hat{\epsilon}_1 E_1 + \hat{\epsilon}_2 E_2) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (56)$$

cuya resultante, en general, describe una onda polarizada elípticamente.

- Con un cambio de base a $\hat{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\epsilon}_1 \pm \hat{\epsilon}_2)$, descomponemos \vec{E} en dos ondas polarizadas circularmente,

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = (\hat{\epsilon}_+ E_+ + \hat{\epsilon}_- E_-) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}. \quad (57)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

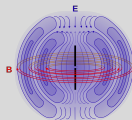
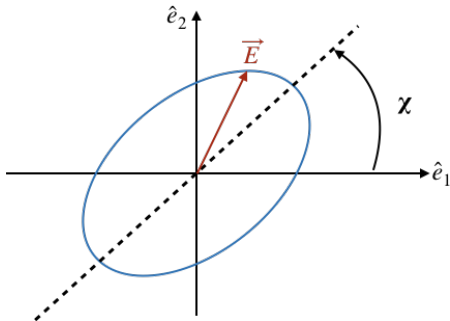
2.2 Polarización

- Con la notación

$$\begin{aligned} E_1 &= \mathcal{E}_1 e^{i\phi_1}, & E_2 &= \mathcal{E}_2 e^{i\phi_2}, \\ E_+ &= \mathcal{E}_+ e^{i\phi_+}, & E_- &= \mathcal{E}_- e^{i\phi_-}, \end{aligned}$$

- tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Polarización lineal : } \phi_y - \phi_x = 0. \\ \text{Polarización circular : } |\phi_y - \phi_x| = \frac{\pi}{2} \text{ y } \mathcal{E}_y = \mathcal{E}_x. \\ \text{El caso general es elíptico, con : } \tan(\chi) = \frac{\mathcal{E}_x \cos(\phi_x)}{\mathcal{E}_y \cos(\phi_y)}. \end{array} \right.$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

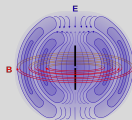
Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

2.2 Polarización

- Llegamos a la definición de los parámetros de Stokes para caracterizar el estado de polarización de **luz monocromática**:

$$\begin{aligned} I &= E_1 E_1^* + E_2 E_2^* = \mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2, \\ Q &= E_1 E_1^* - E_2 E_2^* = \mathcal{E}_1^2 - \mathcal{E}_2^2, \\ U &= E_1 E_2^* - E_2 E_1^* = 2\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1), \\ V &= i(E_1 E_2^* - E_2 E_1^*) = 2\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \sin(\phi_2 - \phi_1). \end{aligned} \quad (58)$$

- Vemos que la irradiancia (Stokes I) es $I \propto |\vec{S}|$, Q y U miden polarización lineal, mientras que V mide polarización circular.
- Para ver la conexión con polarización, usamos experimentos mentales con polarizadores que seleccionan un tipo de polarización (ver cátedra).



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

2.2 Polarización

- Para obtener $\vec{E}(\vec{x}, \omega)$, se necesita conocer $\vec{E}(t)$ para todo t , ya que

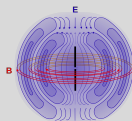
$$\vec{E}(\vec{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\vec{x}, t) e^{i\omega t} dt. \quad (59)$$

- En la práctica, consideramos E_1 y E_2 como variables aleatorias, i.e. para una onda en vacío, descrita por Ec. 56,

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = (E_1(t)\hat{e}_1 + E_2(t)\hat{e}_2) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}. \quad (60)$$

Alternativamente podemos reemplazar la dependencia temporal con una densidad de probabilidad, que a su vez podría depender del tiempo.

- Para fijar ideas, recordemos que $\Delta t \Delta \omega = 1$ para espectros Gaussianos, donde Δt es el ‘tiempo de coherencia’, y $\Delta \omega$ es el ‘ancho de banda’ de la onda cuasi-monocromática.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

2.2 Polarización

- Para medir los parámetros de Stokes, necesitamos promedios del tipo:

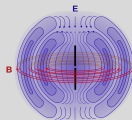
$$\langle E_1 E_2^* \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int dt E_1(t) E_2^*(t) dt. \quad (61)$$

- Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \langle Q^2 \rangle + \langle U^2 \rangle + \langle V^2 \rangle &= \langle I^2 \rangle - \\ &4(\langle \mathcal{E}_1^2 \rangle \langle \mathcal{E}_2^2 \rangle - \langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 e^{i(\phi_2 - \phi_1)} \rangle \langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 e^{-i(\phi_2 - \phi_1)} \rangle), \end{aligned} \quad (62)$$

y

$$I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2. \quad (63)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral

Polarización

Relaciones constitutivas
Relaciones de
Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de
Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en
electrodinámica

Plan

1 Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

2 Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

3 Radiación

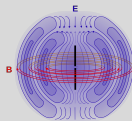
Zona de ondas
Radiación dipolar

4 Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

5 Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

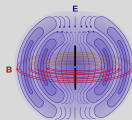
2.3 Relaciones constitutivas

- Consideramos ahora que cada componente monocromática del campo \vec{E} , \vec{B} debe cumplir relaciones constitutivas,

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \epsilon_0 \chi \vec{E} &\longrightarrow & \vec{P}(\omega) = \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}(\omega), \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} &\longrightarrow & \vec{B}(\omega) = \mu(\omega) \vec{H}(\omega), \\ \vec{J} &= \sigma \vec{E} &\longrightarrow & \vec{J}(\omega) = \sigma(\omega) \vec{E}(\omega),\end{aligned}\tag{64}$$

donde hemos agregado la Ley de Ohm.

- Notemos que $\chi(-\omega) = \chi^*(\omega)$, para que $\chi(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \chi(\omega) \exp(-i\omega t)$ sea real (y similarmente para μ y σ).



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de
Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de
Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en
electrodinámica

2.3 Relaciones constitutivas

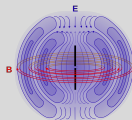
- Recordemos el teorema de convolución: si $X(\omega) = Y(\omega)Z(\omega)$, entonces

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(t-t')Z(t')dt', \quad (65)$$

donde $Y(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega Y(\omega) \exp(-i\omega t)$, etc..

- Si aplicamos el teorema de convolución a χ (por ejemplo),

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')E(t')dt', \text{ con}$$
$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_0 \chi(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (66)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de
Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de
Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en
electrodinámica

2.3 Relaciones constitutivas

- Vemos que $P(t)$ depende de la historia de $\vec{E}(t')$, lo cual tiene sentido físico solo en el pasado, para $t' < t$.
- Esta vez escribimos una onda monocromática con

$$\vec{E}(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = \Re(\vec{E}_c(t)), \quad (67)$$

con $\vec{E}_c = (A + iB)(\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t))$.

- En el eje de Fourier,

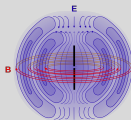
$$E(\omega) = \pi [(A + iB)\delta(\omega - \omega_0) + (A - iB)\delta(\omega + \omega_0)], \text{ y } (68)$$

$$P(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_0 \chi(\omega) E(\omega) e^{-i\omega t} dt, \quad (69)$$

y usando que $\chi(-\omega) = \chi^*(\omega)$,

$$P(t) = \Re \left[\frac{\epsilon_0}{2} (A + iB) \chi(\omega_0) e^{-i\omega_0 t} \right] = \Re[P_c(t)], \quad (70)$$

con $P_c = \epsilon_0 \chi(\omega_0) E_c(t)$.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de
Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de
Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en
electrodinámica

2.3 Relaciones constitutivas

- Con la decomposición espectral de las relaciones constitutivas podemos escribir las versiones armónicas de las ecuaciones de Maxwell en medio materiales (sin cargas libres):

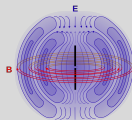
$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\omega) &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{H}(\omega) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\omega) &= -i\omega\mu(\omega)\vec{H}(\omega) & \vec{\nabla} \times \vec{H}(\omega) &= -i\omega\epsilon(\omega)\vec{E}(\omega),\end{aligned}\tag{71}$$

con

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_o(1 + \chi(\omega)) + i\frac{\sigma(\omega)}{\omega}.\tag{72}$$

- Notamos que la susceptibilidad y la conductividad ambas contribuyen a la parte imaginaria de ϵ :

$$\Im(\epsilon) = \epsilon_o\Im(\chi) + \Re(\sigma/\omega).\tag{73}$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización

Relaciones constitutivas

Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

Plan

1 Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

2 Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

3 Radiación

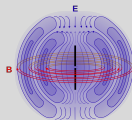
Zona de ondas
Radiación dipolar

4 Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

5 Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas

Relaciones de Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

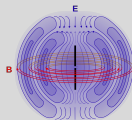
2.4 Relaciones de Kramers-Kronig

- De consideraciones físicas podríamos haber intuido que

$$\vec{P}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t') \vec{E}(t') dt'. \quad (74)$$

- Supongamos que $\vec{E} = \delta(t - t_0) \vec{E}_0$. Entonces, $\vec{P}(t) = G(t, t_0) \vec{E}_0$, y G es la polarización que resulta de un campo eléctrico delta-unitario.
- Si las propiedades del medio no cambian en el tiempo, $G(t, t_0) = G(t - t_0)$, y recuperamos Ec. 66.
- Notemos que causalidad requiere que $G(\tau) = 0$ si $\tau < 0$.
- Entonces,

$$\epsilon_0 \chi(\omega) = \int_0^{\infty} dt G(t) e^{i\omega t}. \quad (75)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas

Relaciones de Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

2.4 Relaciones de Kramers-Kronig

- Extendemos Ec. 75 al plano complejo, con $\tilde{\omega} = \omega_R + i\omega_I$, con $\omega_I > 0$.

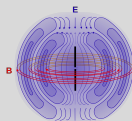
$$\epsilon_0 \chi(\tilde{\omega}) = \int_0^{\infty} dt G(t) e^{i\tilde{\omega}t}. \quad (76)$$

- Si $\int_0^{\infty} |G(t)| dt$ converge, también $\int_0^{\infty} G(t) e^{i\tilde{\omega}t} dt$ converge, y $\chi(\tilde{\omega})$ es analítica en el plano \mathbb{C} superior ($\omega_I > 0$).
- Entonces $\chi(\tilde{\omega})/(\tilde{\omega} - \omega)$, donde ω es un punto en el eje real, es analítica excepto en el polo $\tilde{\omega} = \omega$.
- Podemos aplicar el teorema de Kramers-Kronig, que da

$$i\pi\chi(\omega) = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\Omega)}{\Omega + \omega} d\Omega, \quad (77)$$

donde P indica el 'valor principal' de Cauchy,

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\Omega)}{\Omega + \omega} d\Omega = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\omega-a} \frac{\chi(\Omega)}{\Omega + \omega} d\Omega + \int_{\omega+a}^{\infty} \frac{\chi(\Omega)}{\Omega + \omega} d\Omega \right). \quad (78)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas

Relaciones de Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

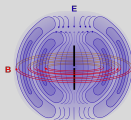
2.4 Relaciones de Kramers-Kronig

- Usando que $\chi^*(\omega) = \chi(-\omega)$ podemos integrar solo en $\Omega > 0$, y con $\chi = \chi_R + i\chi_I$, reescribir Ec. 78:

$$\chi_R(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\Omega \chi_I(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega, \quad (79)$$

$$\chi_I(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\chi_R(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega. \quad (80)$$

- Se cumplen relaciones similares para μ y σ .



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas

Relaciones de Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

Plan

1 Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

2 Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

3 Radiación

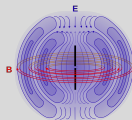
Zona de ondas
Radiación dipolar

4 Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

5 Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

2.5 Propagación en un medio

- Extendemos ahora las soluciones en ondas planas monocromáticas a medio homogéneos. Inyectamos

$$\vec{E}_c = \vec{E}_o e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \text{ y } \vec{H}_c = \vec{H}_o e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (81)$$

en las ecuaciones de Maxwell.

- Ahora permitimos que $\vec{k} \in \mathbb{C}$,

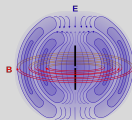
$$\vec{E}_c = \vec{E}_o e^{-\vec{k}_I \cdot \vec{x}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}. \quad (82)$$

- Las ecuaciones Ec. 71 dan:

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{E}_o &= 0 & \vec{k} \cdot \vec{H}_o(\omega) &= 0 \\ \vec{k} \times \vec{E}_o &= \omega \mu \vec{H}_o, & \vec{k} \times \vec{H}_o &= -\omega \epsilon \vec{E}_o. \end{aligned} \quad (83)$$

- Y $\vec{k} \cdot \vec{k} = \omega^2 \epsilon \mu$ (tarea),

$$k_R^2 - k_I^2 + 2i\vec{k}_I \cdot \vec{k}_R = \omega^2 \epsilon \mu. \quad (84)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

2.5 Propagación en un medio

- En el caso de una onda homogénea,

$$\vec{k} = \underbrace{(k_R + ik_I)}_k \hat{e},$$

y $k = \omega N/c$, donde N es el índice de refracción complejo,

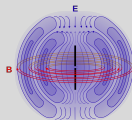
$$N = c\sqrt{\epsilon\mu} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}.$$

- Ponemos $N = n + i\kappa$, con n y κ en \mathbb{R}^+ .

- Ec. 82 da:

$$\vec{E}_c = \vec{E}_0 e^{-\frac{2\pi}{\lambda} \kappa z} e^{j(\frac{2\pi n z}{\lambda} - i\omega t)}. \quad (85)$$

- \Rightarrow la parte imaginaria de N corresponde a absorción.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

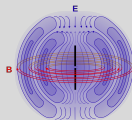
Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

2.5 Propagación en un medio

- Se pueden aplicar las relaciones de Kramers-Kronig a $(N(\omega) - 1)$ (el -1 es porque $\lim_{\omega \rightarrow \infty} N(\omega) = 1$):

$$\begin{aligned}n(\omega) - 1 &= \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\Omega \kappa(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega \\ \kappa(\omega) &= -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{n(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega\end{aligned}\quad (86)$$

- Vemos que la absorción en un medio está relacionada con el índice de refracción real.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig

Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

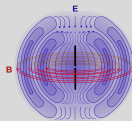
Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

Plan

- 1 Ondas electromagnéticas**
 - Ecuaciones de Maxwell
 - Potenciales retardados
 - Teorema de Poynting
- 2 Propagación de Ondas**
 - Descomposición Espectral
 - Polarización
 - Relaciones constitutivas
 - Relaciones de Kramers-Kronig
 - Propagación en un medio
- 3 Radiación**
 - Zona de ondas
 - Radiación dipolar
- 4 Scattering y difracción**
 - Scattering en régimen de Rayleigh
 - Scattering por N blancos
 - Difracción
- 5 Relatividad**
 - Cuadrivectores
 - Covarianza en electrodinámica



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

3.1 Zona de ondas

- Consideramos fuentes armónicas (el caso general se obtiene por superposición):

$$\begin{aligned}\rho(\vec{x}, t) &= \rho(\vec{x})e^{-i\omega t}, \\ \vec{J}(\vec{x}, t) &= \vec{J}(\vec{x})e^{-i\omega t}.\end{aligned}\quad (87)$$

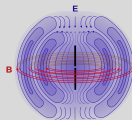
- Vimos que en presencia de fuentes el campo $\vec{A}(\vec{x}, t)$ generado en el espacio vacío, y sin bordes, es

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \int dt' \frac{\vec{J}(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left(t' + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} - t\right).$$

- Para fuentes armónicas,

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}') e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (88)$$

con $k = \omega/c$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

3.1 Zona de ondas

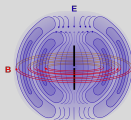
- Obtenemos los campos \vec{H} y \vec{E} usando

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (89)$$

y la Ley de Faraday,

$$\vec{E} = \frac{i}{k} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \vec{\nabla} \times \vec{H}. \quad (90)$$

- Consideramos ahora fuentes confinadas en una región cuya dimensión máxima es d . Si $d \ll \lambda$, hay 3 zonas de interés:
 - La zona cercana, con $d < r \ll \lambda$, donde $e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|} \sim 1$ y recuperamos el caso estático salvo por $\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x})e^{-i\omega t}$.
 - La zona intermediara con $d \ll r \sim \lambda$.
 - La zona lejana, con $\lambda \ll r$.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas

Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

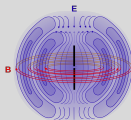
Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

3.1 Zona de ondas

- En la zona lejana, con $\lambda \ll r$, $|\vec{x} - \vec{x}'| \approx r - \hat{n} \cdot \vec{x}'$, donde $\hat{n} = \vec{x}/x \Rightarrow$

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{J}(\vec{x}') e^{-ik\hat{n} \cdot \vec{x}'} d^3x'. \quad (91)$$

- Vemos que $\vec{A}(x, t) = \vec{A}(\vec{x}) e^{-i\omega t}$ representa una onda esférica viajando hacia afuera.
- Además, podemos ver (tarea) usando Ecs 89 y 90 que \vec{E} y \vec{H} también son ondas esféricas transversas a \hat{n} .
- La zona lejana corresponde entonces a la *zona de radiación*, también llamada *zona de ondas*.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

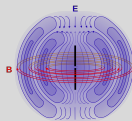
Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

Plan

- 1 Ondas electromagnéticas**
 - Ecuaciones de Maxwell
 - Potenciales retardados
 - Teorema de Poynting
- 2 Propagación de Ondas**
 - Descomposición Espectral
 - Polarización
 - Relaciones constitutivas
 - Relaciones de Kramers-Kronig
 - Propagación en un medio
- 3 Radiación**
 - Zona de ondas
 - Radiación dipolar
- 4 Scattering y difracción**
 - Scattering en régimen de Rayleigh
 - Scattering por N blancos
 - Difracción
- 5 Relatividad**
 - Cuadrivectores
 - Covarianza en electrodinámica



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

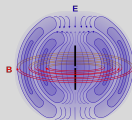
3.2 Radiación dipolar

- Ahora usamos que $d \ll \lambda$ para simplificar \vec{A} en la zona de ondas. El integrando de Ec. 91 se puede expandir en potencias de $-ik\hat{n} \cdot \vec{x}'$, usando

$$e^{-ik\hat{n} \cdot \vec{x}'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} (\hat{n} \cdot \vec{x}')^n.$$

- Entonces,

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \int \vec{J}(\vec{x}') (\hat{n} \cdot \vec{x}')^n d^3x'. \quad (92)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

3.2 Radiación dipolar

- Para $n = 0$, correspondiente al término dominante en la expansión en $k\hat{n} \cdot \vec{x}'$, tenemos:

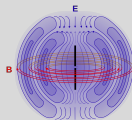
$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{J}(\vec{x}') d^3x'. \quad (93)$$

- Usando la ecuación de continuidad, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, tenemos $i\omega\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$.
- Entonces (tarea):

$$\int \vec{J}(\vec{x}') = - \int \vec{x}' (\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}) d^3x' = -i\omega \int \vec{x}' \rho(\vec{x}') d^3x'. \quad (94)$$

- Finalmente,

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{-i\mu_0\omega}{4\pi} \vec{p} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \text{con} \quad \underbrace{\vec{p} = \int \vec{x}' \rho(\vec{x}') d^3x'}_{\text{momento dipolar eléctrico}}. \quad (95)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

3.2 Radiación dipolar

- Obtenemos ahora los campos \vec{E} y \vec{H} :

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \frac{ck^2}{4\pi} (\hat{n} \times \vec{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \\ \vec{E} &= \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \vec{H} \times \hat{n}.\end{aligned}\quad (96)$$

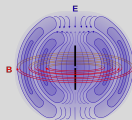
, donde constatamos que la radiación dipolar eléctrica es polarizada linealmente.

- La potencia emitida en dirección \hat{n} se puede escribir con $dP = r^2 d\Omega \hat{n} \cdot \vec{S} \Rightarrow$,

$$\begin{aligned}\frac{dP}{d\Omega} &= \frac{1}{2} \Re \left[r^2 \hat{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) \right], \\ &= \frac{c^2}{32\pi^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} k^4 |\vec{p}|^2 \sin(\theta).\end{aligned}\quad (97)$$

- La potencia total emitida es

$$P = \frac{c^2 k^4}{12\pi} |\vec{p}|^2. \quad (98)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

3.2-Radiación dipolar

- El siguiente término en la expansión de $e^{-ik\hat{n}\cdot\vec{x}'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} (\hat{n}\cdot\vec{x}')^n$ corresponde al $n = 1$.
- Ec. 92 da:

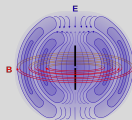
$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \int \vec{J}(\vec{x}') (\hat{n}\cdot\vec{x}') d^3x'. \quad (99)$$

- Veamos que este término da origen a una contribución *dipolar magnética* y *quadrupolar eléctrica*. Para ello, separamos el integrando:

$$\vec{J}(\vec{x}') (\hat{n}\cdot\vec{x}') = \underbrace{\frac{1}{2} \left[(\hat{n}\cdot\vec{x}')\vec{J} + (\hat{n}\cdot\vec{J})\vec{x}' \right]}_A + \underbrace{\frac{1}{2} (\vec{x}' \times \vec{J}) \times \hat{n}}_B. \quad (100)$$

- Consideramos primero la contribución de la parte *B*. Reconocemos la magnetización \mathcal{M} ,

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} (\vec{x}' \times \vec{J}). \quad (101)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

3.2-Radiación dipolar

- Para la parte B , entonces,

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{ik\mu_o}{4\pi}(\hat{n} \times \vec{m}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right), \quad \text{con} \quad (102)$$

$$\vec{m} = \int \mathcal{M} d^3x. \quad (103)$$

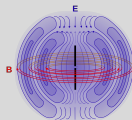
- En la zona de radiación, $kr \gg 1$, obtenemos (tarea):

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{ik\mu_o}{4\pi}(\hat{n} \times \vec{m}) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (104)$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\frac{k^2}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}}(\hat{n} \times \vec{m}) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (105)$$

$$\vec{H}(\vec{x}) = -\sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}}(\vec{E} \times \hat{n}). \quad (106)$$

- Esta contribución se llama radiación dipolar magnética.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de
Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de
Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

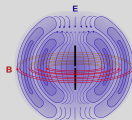
Cuadrivectores
Covarianza en
electrodinámica

3.2-Radiación dipolar

- Para la parte A de la contribución $n = 1$, de un manejo estandard se tiene:

$$A = \frac{i\omega}{2} \int \vec{x}' (\hat{n} \cdot \vec{x}') \rho(\vec{x}') d^3 x', \quad (107)$$

lo cual representa momentos de orden 2 de $\rho(\vec{x}')$, o sea es una contribución cuadrupolar eléctrica, que no desarrollaremos.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

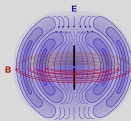
Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

Plan

- 1 Ondas electromagnéticas**
 - Ecuaciones de Maxwell
 - Potenciales retardados
 - Teorema de Poynting
- 2 Propagación de Ondas**
 - Descomposición Espectral
 - Polarización
 - Relaciones constitutivas
 - Relaciones de Kramers-Kronig
 - Propagación en un medio
- 3 Radiación**
 - Zona de ondas
 - Radiación dipolar
- 4 Scattering y difracción**
 - Scattering en régimen de Rayleigh
 - Scattering por N blancos
 - Difracción
- 5 Relatividad**
 - Cuadrivectores
 - Covarianza en electrodinámica



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

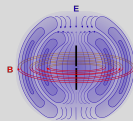
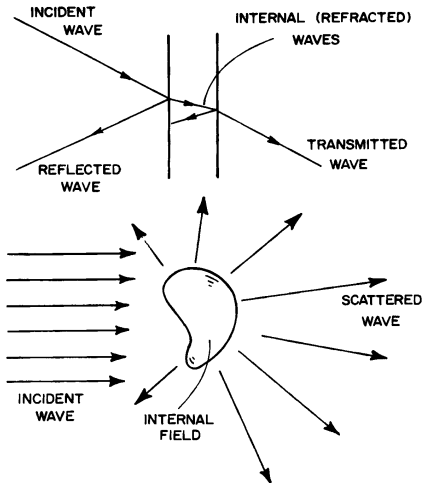
Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

4.1-Scattering en régimen de Rayleigh



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh

Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

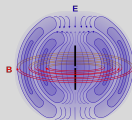
4.1- Scattering en régimen de Rayleigh

- Consideramos primero un solo obstáculo (o partícula), con dimensión máxima $d \ll \lambda$.
- Describimos la ondas incidente con

$$\vec{E}_i = \hat{e}_o E_o e^{ik\hat{n}_o \cdot \vec{x}} \quad (108)$$

$$\vec{H}_i = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} \hat{n}_o \times \vec{E}_i. \quad (109)$$

- Notar que la polarización incidente corresponde al vector \hat{e}_o .
- Al interactuar con el blanco, los campos inducen dipolos eléctricos y magnéticos como si fuesen campos estáticos en la 'zona estática' (salvo por la dependencia en $\exp(-i\omega t)$).
- Los dipolos inducidos pueden a su vez general radiación dipolar eléctrica y magnética, con campos \vec{E}_s y \vec{H}_s .



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de
Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

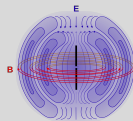
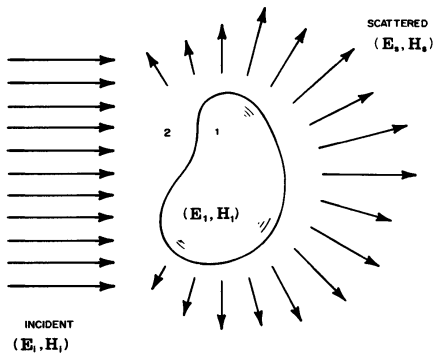
Scattering y difracción

Scattering en régimen de
Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en
electrodinámica

4.1- Scattering en régimen de Rayleigh



Ondas electromagnéticas

- Ecuaciones de Maxwell
- Potenciales retardados
- Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

- Descomposición Espectral
- Polarización
- Relaciones constitutivas
- Relaciones de Kramers-Kronig
- Propagación en un medio

Radiación

- Zona de ondas
- Radiación dipolar

Scattering y difracción

- Scattering en régimen de Rayleigh
- Scattering por N blancos
- Difracción

Relatividad

- Cuadrivectores
- Covarianza en electrodinámica

4.1- Scattering en régimen de Rayleigh

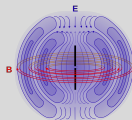
- En la zona de ondas y en el régimen de Rayleigh, en dirección \hat{n} tenemos (de Ec. 96 y 105),

$$\vec{E}_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \left[(\hat{n} \times \vec{p}) \times \hat{n} - \hat{n} \times \frac{\vec{m}}{c} \right] \quad (110)$$

$$\vec{H}_s = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \hat{n}_o \times \vec{E}_s. \quad (111)$$

- Extendemos el concepto de $\frac{dP}{d\Omega}$ para seleccionar un estado de polarización \hat{e} de la onda dispersada, y normalizando por el flujo incidente:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\hat{n}, \hat{e}; \hat{n}_o, \hat{e}_o) &= r^2 \frac{|\hat{e}^* \cdot \vec{E}_s|^2}{|\hat{e}_o \cdot \vec{E}_i|^2}, \Rightarrow \\ \frac{d\sigma}{d\Omega}(\hat{n}, \hat{e}; \hat{n}_o, \hat{e}_o) &= \frac{k^4}{(4\pi\epsilon_0 E_o)^2} \left| \hat{e}^* \cdot \vec{p} + (\hat{n} \times \hat{e}^*) \cdot \frac{\vec{m}}{c} \right|^2. \end{aligned} \quad (112)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

4.1- Scattering en régimen de Rayleigh

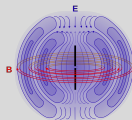
- Como ejemplo consideramos que el blanco es una pequeña esfera dieléctrica, con radio a , $\mu/\mu_0 = \mu_r = 1$, y con $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega)$.
- En la zona estática, donde $d \ll r \ll \lambda$, los campos son cuasiestáticos y (tarea)

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) a^3 \vec{E}_i, \quad (113)$$

y no hay dipolo magnético.

- La sección eficaz de scattering es entonces, para polarización \hat{e} ,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 a^6 \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2 |\hat{e}^* \cdot \hat{e}_0|^2. \quad (114)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

4.1- Scattering en régimen de Rayleigh

- Podemos promediar para el caso de radiación incidente no polarizada (luz natural):

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle = k^4 a^6 \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2 \langle |\hat{\mathbf{e}}^* \cdot \hat{\mathbf{e}}_o|^2 \rangle. \quad (115)$$

- Obtenemos para las polarización paralelas y perpendiculares al plano de scattering (\hat{n} , \hat{n}_o) (tarea, usando coordenadas esféricas con \hat{n}_o según \hat{z}):

$$\frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} = \frac{1}{2} k^4 a^6 \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2 \cos^2(\theta) \quad (116)$$

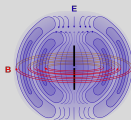
$$\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{1}{2} k^4 a^6 \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2 \quad (117)$$

- Para Stokes I tenemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 a^6 \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2 \frac{1}{2} (1 + \cos^2(\theta)), \quad (118)$$

y una medida de la fracción de polarización sería

$$\Pi(\theta) \equiv \left(\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} - \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} \right) / I = \frac{\sin^2(\theta)}{1 + \cos^2(\theta)}.$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

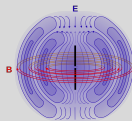
Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadriectores
Covarianza en electrodinámica

Plan

- 1 Ondas electromagnéticas**
 - Ecuaciones de Maxwell
 - Potenciales retardados
 - Teorema de Poynting
- 2 Propagación de Ondas**
 - Descomposición Espectral
 - Polarización
 - Relaciones constitutivas
 - Relaciones de Kramers-Kronig
 - Propagación en un medio
- 3 Radiación**
 - Zona de ondas
 - Radiación dipolar
- 4 Scattering y difracción**
 - Scattering en régimen de Rayleigh
 - Scattering por N blancos
 - Difracción
- 5 Relatividad**
 - Cuadrivectores
 - Covarianza en electrodinámica



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh

Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

4.2- Scattering por N blancos

- Si consideramos ahora un sistema de N blancos, usamos el principio de superposición

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\hat{n}, \hat{e}; \hat{n}_o, \hat{e}_o) = r^2 \frac{|\hat{e}^* \cdot \sum_{j=1}^N \vec{E}_{s,j}|^2}{|\hat{e}_o^* \cdot \vec{E}_i|^2}. \quad (119)$$

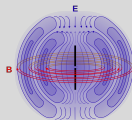
- En la zona de ración, $|\vec{x} - \vec{x}'| \sim r - \hat{n} \cdot \vec{x}'$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4}{(4\pi\epsilon_o E_o)^2} \left| \sum_{j=1}^N \left[\hat{e}^* \cdot \vec{p}_j + (\hat{n} \times \hat{e}^*) \cdot \frac{\vec{m}_j}{c} \right] e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}_j} \right|^2, \quad (120)$$

donde $q = k\hat{n}_o - k\hat{n}$ y $\{x_j\}$ son las posiciones de los blancos.

- Si todos los blancos son idénticos,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_1 \mathcal{F}(\vec{q}), \quad \text{donde } \mathcal{F}(\vec{q}) = \left| \sum_j e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}_j} \right|^2. \quad (121)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh

Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

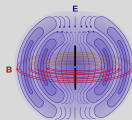
4.2- Scattering por N blancos

- Si las posiciones \vec{x}_j son aleatorias (**tarea**),

$$\langle \mathcal{F}(\vec{q}) \rangle = \left\langle \left| \sum_j e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}_j} \right|^2 \right\rangle \approx N, \quad (122)$$

y

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx N \frac{k^4}{(4\pi\epsilon_0 E_0)^2} \left| \sum_{j=1}^N \left[\hat{e}^* \cdot \vec{p}_j + (\hat{n} \times \hat{e}^*) \cdot \frac{\vec{m}_j}{c} \right] e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}_j} \right|^2. \quad (123)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh

Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

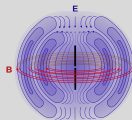
Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

4.2- Scattering por N blancos

- Si los blancos están dispuestos regularmente, por ejemplo en una red cúbica $N_1 \times N_2 \times N_3$ con espaciamento a (tarea),

$$\mathcal{F}(\vec{q}) = N^2 \left[\frac{\sin^2 \left(\frac{1}{2} N_1 q_1 a \right) \sin^2 \left(\frac{1}{2} N_2 q_2 a \right) \sin^2 \left(\frac{1}{2} N_3 q_3 a \right)}{N_1^2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} q_1 a \right) N_2^2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} q_2 a \right) N_3^2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} q_3 a \right)} \right], \quad (124)$$

donde $q = q_1 \hat{e}_1 + q_2 \hat{e}_2 + q_3 \hat{e}_3$.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh

Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

Plan

1 Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

2 Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

3 Radiación

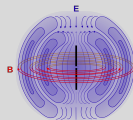
Zona de ondas
Radiación dipolar

4 Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

5 Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

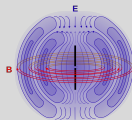
Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

4.3- Difracción

- El problema de difracción es similar al de scattering, excepto que especificamos los valores de los campos en los bordes de las superficies blancos.
- Consideremos un campo escalar $\psi(\vec{x}, t)$ que satisface la ecuación de ondas. Para una componente armónica, con dependencia temporal $\exp(-i\omega t)$,

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\vec{x}) = 0. \quad (125)$$

- Queremos resolver esta ecuación para una onda reflectada/transmitida por una superficie S_1 . Cerramos el espacio con otra superficie S_2 , que llevaremos a ∞ .



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

4.3- Difracción

- Típicamente usamos $\psi = 0$ en S_1 , salvo en posible aperturas.
- Introducimos una función de Green G_D :

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = G(\vec{x}, \vec{x}') + F(\vec{x}, \vec{x}'), \quad (126)$$

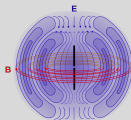
donde

$$(\nabla^2 + k^2)G(\vec{x}, \vec{x}') = -\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (127)$$

y

$$(\nabla^2 + k^2)F(\vec{x}, \vec{x}') = 0. \quad (128)$$

- Ajustamos F tal que $G_D(\vec{x}, \vec{x}') = 0$ si $\vec{x} \in S_1$.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

4.3- Difracción

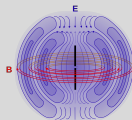
- El teorema de Green (luego de extenderlo a la ecuación de Helmholtz Ec. 125, **tarea**), da, usando el par de funciones G_D y ψ ,

$$\psi(\vec{x}) = \oint_S \left[\psi(\vec{x}') \hat{n}' \cdot \vec{\nabla}' G_D(\vec{x}, \vec{x}') - G_D(\vec{x}, \vec{x}') \hat{n}' \cdot \vec{\nabla}' \psi(\vec{x}') \right] dS' \quad (129)$$

y usando las propiedad que $G_D(\vec{x}, \vec{x}') = 0$ si $\vec{x}' \in S$,

$$\psi(\vec{x}) = \oint \left[\psi(\vec{x}') \hat{n}' \cdot \vec{\nabla}' G_D(\vec{x}, \vec{x}') \right] dS'. \quad (130)$$

- Notamos la ausencia de integral de volumen en la aplicación del teorema de Green en Ec. 130, que refleja la ausencia de fuentes en la ecuación de ondas.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

4.3- Difracción

- Como ejemplo particularizamos al caso en que S_1 es un plano infinito (en $z = 0$).
- Sabemos que de Ec. 19 que G esta dado por:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad \text{con } \vec{R} = \vec{x} - \vec{x}'. \quad (131)$$

- Usamos el método de imágenes para determinar F :

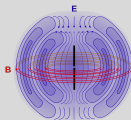
$$F = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR'}}{R'}, \quad \text{con } \vec{R}' = \vec{x} - \vec{x}'', \quad (132)$$

donde \vec{x}'' es el simétrico de \vec{x} relativo a $z = 0$.

- Por diseño la función de Green

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{ikR'}}{R'} \right), \quad (133)$$

se anula en $\vec{x}' \in S_1$.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

4.3- Difracción

- Inyectando G_D (Ec. 133) en el teorema de Green (Ec. 130) llegamos a (tarea):

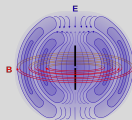
$$\psi(\vec{x}) = \frac{k}{2\pi i} \oint_{S_1} \psi(\vec{x}') \frac{\hat{n}' \cdot \vec{R}}{R^2} e^{ikR} \left[1 - \frac{1}{ikR} \right] dS', \quad (134)$$

donde hemos usado que al llevar S_2 a ∞ , $\psi \sim e^{ikR}/R$ en S_2 , y $\nabla' G_D \sim 1/R^2$, de manera que el integrando en S_2 decae mas rápido que $(1/R^2)$.

- Si consideramos que $\psi(\vec{x}') = 0$ en S_1 salvo en una apertura, en el límite $z \rightarrow \infty$, $\frac{\hat{n}' \cdot \vec{R}}{R} \sim 1$,

$$\psi(\vec{x}) = \frac{k}{2\pi i} \int_{\text{apertura}} \frac{e^{ikR}}{R} \psi(\vec{x}') dS', \quad (135)$$

y reconocemos las fuentes secundarias del principio de Huygens.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

Cuadriectores
Covarianza en electrodinámica

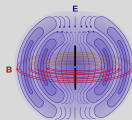
4.3- Difracción

- Un cálculo detallado para el caso vectorial da (ver Jackson 10.6 y 10.7), para el campo eléctrico difractado por una apertura en un plano conductor en $z = 0$,

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \vec{\nabla} \times \int (\hat{n} \times \vec{E}_i) \frac{e^{ikR}}{R} dS'. \quad (136)$$

- En la región $z \rightarrow \infty$, esperamos que \vec{E} sea ondulario, y si \vec{E}_i es una onda plana,

$$\vec{E}(\vec{x}) \approx \frac{ik}{2\pi} \hat{n} \times (\hat{n}' \times \vec{E}_i) \int \frac{e^{ikR}}{R} dS'. \quad (137)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de
Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de
Rayleigh
Scattering por N blancos

Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en
electrodinámica

Plan

1 Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

2 Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

3 Radiación

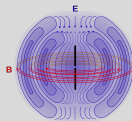
Zona de ondas
Radiación dipolar

4 Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

5 Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

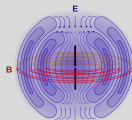
5.1- Cuadrivectores

En esta Section usamos unidades CGS, mas adaptadas para describir la simetría entre \vec{E} y \vec{B} . Bibliografía: Rybicki & Lightman.

- Definimos $x^\mu = (ct, x, y, z)$, cuadrivector posición contrariante, con norma $s^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ (con convención de suma).
- También introducimos $x_\mu = (-ct, x, y, z)$, cuadrivector posición covariante.
- $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$, con

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (138)$$

- Con $\eta^{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu}$, tenemos $x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$.
- Notar que $\eta^{\mu\sigma} \eta_{\sigma\nu} = \delta_\nu^\mu$.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores

Covarianza en electrodinámica

5.1- Cuadrivectores

- Cambiamos de sistema de referencia de S a S' , en movimiento uniforme con velocidad v según \hat{x} relativo a S .
- Un 4V contravariante transforma con

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \text{ donde } \Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (139)$$

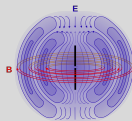
con $\beta = v/c$, y $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

- Para un 4V covariante (**tarea**),

$$x'_{\mu} = \tilde{\Lambda}_{\mu}^{\nu} x_{\nu}, \text{ con } \tilde{\Lambda}_{\mu}^{\nu} = \eta_{\mu\tau} \Lambda^{\tau}_{\sigma} \eta^{\sigma\nu}. \quad (140)$$

- $\tilde{\Lambda}_{\mu}^{\nu}$ es la inversa de Λ^{μ}_{ν} :

$$\Lambda^{\sigma}_{\nu} \tilde{\Lambda}_{\sigma}^{\mu} = \delta^{\mu}_{\nu}, \text{ y } \tilde{\Lambda}_{\mu}^{\alpha} x'^{\mu} = x^{\alpha}. \quad (141)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores

Covarianza en electrodinámica

5.1- Cuadrivectores

- El producto punto entre dos 4V A^μ y B^μ es invariante de Lorents:

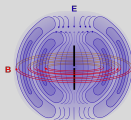
$$A^\mu B_\mu = A'^\mu B'_\mu. \quad (142)$$

- También tenemos el 4V velocidad, $U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$, en que $d\tau$ es el intervalo relativista (i.e. de tiempo propio) entre x^μ y $x^\mu + dx^\mu$.
- En componentes (**tarea**), $U^\mu = \gamma_u(c, \vec{u})$, con $\gamma_u = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$.
- Si pasamos a $U' = \Lambda^\mu_\nu U^\nu$,

$$\gamma_{u'} = \gamma\gamma_u(1 - \frac{uv}{c^2} \cos(\theta)), \quad \text{con } \theta = \angle(\vec{u}, \vec{v}). \quad (143)$$

- En el sistema ligado a una partícula con velocidad \vec{u} , $U' = c(1, \vec{0})$, y para un 4V A^μ ,

$$A'^0 = -\frac{1}{c} U^\mu A_\mu = -\frac{1}{c} U'^\mu A'_\mu. \quad (144)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

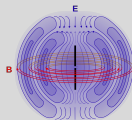
5.1- Cuadrivectores

- Notemos que la fase de una onda plana debe ser invariante de Lorentz porque la anulación de \vec{E} y de \vec{B} simultáneamente en un sistema implica su anulación en cualquier otro sistema.
- Introducimos $k^\mu = (\omega/c, \vec{k})$:

$$k^\mu x_\mu = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \text{invariante} \Rightarrow k^\mu \text{ es 4V.} \quad (145)$$

- Usamos Ec. 144 para deducir el efecto Doppler relativista (tarea)

$$ck'^0 = \omega' = -U^\mu k_\mu = \omega\gamma\left(1 - \frac{v}{c} \cos(\theta)\right). \quad (146)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores

Covarianza en electrodinámica

5.1- Cuadrivectores

- Otro ejemplo importante de 4V es el gradiente. Si λ es un escalar (invariante), entonces

$$\lambda_{,\mu} \equiv \frac{\partial \lambda}{\partial x^\mu} \text{ es 4V covariante, y} \quad (147)$$

$$\lambda^{,\mu} \equiv \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu} \text{ es 4V contravariante.} \quad (148)$$

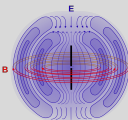
- Demo: de $x^\nu = \tilde{\Lambda}^\nu_\mu x'^\mu$, tenemos que $\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \tilde{\Lambda}^\nu_\mu$, y como $\lambda' = \lambda$,

$$\lambda'_{,\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \lambda}{\partial x^\nu}. \quad (149)$$

- Extendemos las propiedades de los 4V a tensores en general: un tensor de orden n transforma como el producto de n 4Vs.
- Por ejemplo,

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\tau T^{\sigma\tau},$$

$$T'^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\sigma \tilde{\Lambda}^\tau_\nu T^\sigma_\tau.$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores

Covarianza en electrodinámica

Plan

1 Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

2 Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

3 Radiación

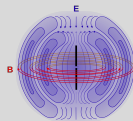
Zona de ondas
Radiación dipolar

4 Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

5 Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

5.2- Covarianza en electrodinámica

- La conservación de carga, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, se puede escribir

$$J^{\mu}_{,\mu} = 0, \text{ con la cuadricorriente } J^{\mu} = (\rho c, \vec{J}). \quad (150)$$

- En el Gauge de Lorentz, y usando CGS,

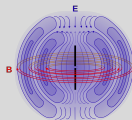
$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J} = \partial_{\alpha} \partial^{\alpha} \vec{A}, \quad (151)$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho = \partial_{\alpha} \partial^{\alpha} \Phi. \quad (152)$$

- Con $A^{\mu} = (\Phi, \vec{A})$,

$$A^{\beta}_{,\alpha} = -\frac{4\pi}{c} J^{\beta}, \text{ en que } A^{\beta}_{,\alpha} = \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha} \partial x^{\alpha}} A^{\beta}. \quad (153)$$

- El Gauge de Lorentz $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ se escribe simplemente $A^{\alpha}_{,\alpha} = 0$.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadriectores
Covarianza en electrodinámica

5.2- Covarianza en electrodinámica

- Para escribir las ecuaciones de Maxwell en forma covariante, introducimos el tensor de campos

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}. \quad (154)$$

- Con $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ y $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ (tarea): 2

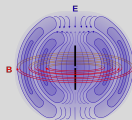
$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (155)$$

- Las ecuaciones de Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$ y $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$ se escriben (tarea)

$$F_{\mu\nu}{}^{,\nu} = \frac{4\pi}{c}J_{\mu}. \quad (156)$$

- Las ecuaciones internas $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ y $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$ se escriben (tarea)

$$F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\sigma\mu,\nu} + F_{\nu\sigma,\mu} = 0. \quad (157)$$



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadriectores
Covarianza en electrodinámica

5.2- Covarianza en electrodinámica

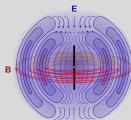
- Usamos la covarianza de $F_{\mu\nu}$ para deducir las leyes de transformación de los campos \vec{E} y \vec{B} :

$$F'_{\mu\nu} = \tilde{\Lambda}_\mu^\alpha \tilde{\Lambda}_\nu^\beta F_{\alpha\beta}. \quad (158)$$

- Por componentes, obtenemos (tarea):

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel}, & B'_{\parallel} &= B_{\parallel}, \\ E'_{\perp} &= \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{\beta} \times \vec{B}), & B'_{\perp} &= \gamma(\vec{B}_{\perp} + \vec{\beta} \times \vec{E}). \end{aligned} \quad (159)$$

- Vemos que se mezclan \vec{E} y \vec{B} , y si $\vec{B} = 0$ en S , al pasar a S' tenemos $\vec{B}' \neq 0$.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica

5.2- Covarianza en electrodinámica

- Para extender la fuerza de Lorentz, introducimos el 4V momentum $P^\mu = m_o U^\beta$, con m_o masa en reposo. Escribimos $P^\mu = (E/c, \vec{P})$, en que E es la energía total de la partícula (en reposo $E = m_o c^2$).
- La 4-aceleración es

$$a^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau}, \quad (160)$$

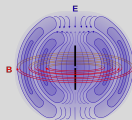
y para recuperar la 2nda ley de Newton en el límite no relativista, la 4-fuerza es

$$F^\mu = m_o a^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau}. \quad (161)$$

- Escribimos la 4-fuerza de Lorentz con

$$F^\mu = \frac{q}{c} F^\mu{}_\nu U^\nu. \quad (162)$$

- En componentes, (tarea) $\vec{F} = q(\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}) + q\vec{E}$.



Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell
Potenciales retardados
Teorema de Poynting

Propagación de Ondas

Descomposición Espectral
Polarización
Relaciones constitutivas
Relaciones de Kramers-Kronig
Propagación en un medio

Radiación

Zona de ondas
Radiación dipolar

Scattering y difracción

Scattering en régimen de Rayleigh
Scattering por N blancos
Difracción

Relatividad

Cuadrivectores
Covarianza en electrodinámica