

Parte I

Electrostática, Magnetostática

Índice

I	1
1. Electrostática	1
1.1. Campo y potencial eléctricos	1
1.2. Energía Potencial	2
1.3. Teorema de Green	4
1.4. Separación de variables	7
1.4.1. Condiciones de borde rectangulares	7
1.4.2. Cilíndricas	8
1.4.3. Esféricas	11
1.5. Expansiones de Funciones de Green	14
1.6. Multipolos	17
1.6.1. Momentos multipolares	17
1.6.2. Campo dipolar eléctrico	18
1.7. Dieléctricos	18
1.7.1. Desplazamiento Eléctrico	18
1.7.2. Modelos para la susceptibilidad eléctrica	20
1.7.3. Energía en dieléctricos	21
2. Magnetostática	22
2.1. Leyes de Bio & Savart y de Ampère	22
2.2. Potencial Vector	23
2.3. Distribución localizada de corrientes	24
2.4. Energía de una distribución local de corrientes	25
2.5. Ecuaciones macroscópicas	26
2.6. Problemas con condiciones de borde en magnetostática	27
2.7. Inducción y Energía Magnética	28

1. Electrostática

1.1. Campo y potencial eléctricos

- Campo eléctrico debido a N cargas:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{(\vec{x} - \vec{x}_i)}{\|\vec{x} - \vec{x}_i\|^3}. \quad (1)$$

- Campo eléctrico debido a distribución continua de cargas:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^3}. \quad (2)$$

- Tenemos que $\vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi)$, donde Φ es el potencial eléctrico debido a distribución continua de cargas:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|}. \quad (3)$$

- Ley de Gauss, forma diferencial:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (4)$$

- Con $\vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi)$ llegamos a la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (5)$$

- Aplicando Ec. 5 a una carga puntual obtenemos una representación de la delta de Dirac:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|} \right) = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (6)$$

.3

.4

1.2. Energía Potencial

- La fuerza eléctrica $\vec{F} = q\vec{E}$ es conservativa, con lo que el trabajo que ejerce se relaciona con una diferencia de energía potencial:

$$W_{AB} = -q(\Phi(\vec{x}_B) - \Phi(\vec{x}_A)) = -\Delta\Phi_{AB} = -\Delta U_{AB}.$$

- Es usual tomar la referencia de potencial en infinito.
- Definimos la energía de interacción entre N cargas como el trabajo necesario para construir el sistema de cargas acercándolas una por una desde infinito:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \sum_{j<i} \frac{q_j}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|} \\ &= \frac{1}{2 \times 4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|}. \end{aligned} \quad (7)$$

- En el caso continuo,

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int \int d^3x d^3x' \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{\vec{x} - \vec{x}'} = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x})\Phi(\vec{x}). \quad (8)$$

.5

1.1.2- Densidad de energía eléctrica

- Usando la Ec. de Poisson, Ec. 5, tenemos que la energía asociada a una distribución de cargas Ec. 8 se puede escribir

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \int \Phi \nabla^2 \Phi d^3x = \frac{\epsilon_0}{2} \int \|\vec{\nabla}\Phi\|^2 d^3x = \frac{\epsilon}{2} \int \|\vec{E}\|^2 d^3x.$$

- \Rightarrow densidad de energía $u = \frac{\epsilon_0}{2} \|E\|^2$, que calza con la densidad de energía asociada al campo \vec{E} en la ecuación de continuidad para la densidad de energía.
- **Ojo:** densidad de energía es definida positiva, mientras que la energía de interacción entre dos cargas con signos opuestos en negativa!

.6

1.1.2- Auto-energías

- \Rightarrow distinguir entre energía de interacción para cargas discretas y para distribuciones. La versión discreta ignora el detalle de la energía asociada a la carga puntual en si: si fuese una esfera llena, tendría una energía de interacción 'interna', i.e. una 'auto-energía'.
- Ejemplo: aplicar $U = \frac{1}{2} \int \rho \Phi d^3x$ a dos cargas puntuales q_1 y q_2 .
- \Rightarrow Energía potencial de 'ligazón' entre N cargas es distinta a la energía total almacenada en el campo \vec{E} .

.7

1.1.2- Condensadores

- Condensador = configuración de N conductores, con cargas totales $\{Q_i\}$ y potenciales $\{V_i\}$, sometidos mutuamente a sus campos eléctricos.
- Por el teorema de superposición, i.e. por linealidad de la ley de Gauss,

$$Q_i = \sum_j C_{ij} V_j, \quad (9)$$

donde los C_{ij} son las capacidades del sistema de condensadores.

.8

- La energía potencial de interacción entre todos los conductores es, según Ec. 8,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x}) \Phi(\vec{x}) = \frac{1}{2} \sum_i \oint dS_i \sigma_i V_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij} V_i V_j, \quad (10) \end{aligned}$$

donde S_i representa la superficie de cada conductor.

- Podemos confirmar aquí que esta expresión da correctamente la energía total de interacción al considerar la energía necesaria para cargar los condensadores. Por ejemplo, en el caso del condensador mas simple, con 2 conductores, $Q = CV$ y la energía necesaria para cargarlo es

$$U = \int dU = \int_0^Q V' dQ' = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} QV.$$

.9

1.3. Teorema de Green

1.1.3- Identidades de Green

- La especificación de ρ en todo el espacio es suficiente para determinar Φ . Sin embargo, hay situaciones en las que se especifican condiciones de borde en Φ , como en el caso de los condensadores. Para estos casos es más conveniente usar el teorema de Green, que tratar de identificar el detalle de $\rho(\vec{x})$.
- Identidad de Green, para dos campos escalares Ψ y Φ :

$$\int_{\mathcal{V}} (\Phi \nabla^2 \Psi + \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{\nabla} \Psi) d^3x = \oint_{\mathcal{A}} \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\mathcal{A}, \quad (11)$$

donde

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} \equiv \vec{\nabla} \Psi \cdot \hat{n}.$$

- Teorema de Green:

$$\int_{\mathcal{V}} (\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi) d^3x = \oint_{\mathcal{A}} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) d\mathcal{A}. \quad (12)$$

.10

1.1.3- Aplicación del teorema de Green en Electroestática

- Aplicamos el teorema de Green Ec. 12 con $\Psi(\vec{x}') = \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|}$, en que \vec{x}' es la variable de integración, y con el potencial eléctrico $\Phi(\vec{x}')$:

$$\int_{\mathcal{V}} \left\{ -4\pi \Phi \delta(\vec{x} - \vec{x}') + \frac{1}{\epsilon_0 \|\vec{x} - \vec{x}'\|} \rho(\vec{x}') \right\} d^3x' = \oint_{\mathcal{A}} \left\{ \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|} \right) - \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right\} d\mathcal{A}'.$$

- Si el punto de observación \vec{x} queda dentro de \mathcal{V} ,

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{x}')}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|} d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathcal{S}} \left[\frac{1}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|} \frac{\partial \Phi}{\partial n'} - \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|} \right) \right] d\mathcal{A}'. \quad (13)$$

- Vemos que el teorema de Green requiere especificar $\Phi(\vec{x}')$ y su gradiente en la superficie, $\frac{\partial \Phi}{\partial n'}$. Sin embargo, el experimento nos dice que para determinar el potencial encerrado entre conductores, como en un condensador, basta con especificar las diferencias de potenciales.

.11

1.1.3- Condiciones de borde

- Vamos a aislar 2 tipos de condiciones de borde:
 - Especificar $\Phi(\vec{x}')$ en $\mathcal{A} \Rightarrow$ “Dirichlet”.
 - Especificar $\frac{\partial\Phi}{\partial n'}$ en $\mathcal{A} \Rightarrow$ “Neumann”
- Podemos demostrar que las soluciones de la Ec. de Poisson es unica, para cada una de estas condiciones de bordes. Por lo tanto, la Ec. 13 no es solución de la Ec. de Poisson, al permitir la especificación de los dos tipos de condiciones de bordes.
- Solucionamos esta inconsistencia con una generalización de Ec. 13 usando “Funciones de Green”.

.12

1.1.3- Solución formal con funciones de Green

- Definimos la función de Green con

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|} + F(\vec{x}, \vec{x}'), \quad (14)$$

donde pedimos que $\nabla^2 F = 0$ dentro de \mathcal{V} .

- Volvemos a aplicar el teorema de Green, Ec. 12, con $\Psi(\vec{x}') = G(\vec{x}, \vec{x}')$, y con el potencial eléctrico $\Phi(\vec{x}')$:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[G(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial\Phi}{\partial n'} - \Phi \frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{x}, \vec{x}') \right] d\mathcal{A}'. \quad (15)$$

- Para Dirichlet, pedimos $G_D(\vec{x}, \vec{x}') = 0$ si $\vec{x}' \in \mathcal{A}$:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{x}') G_D(\vec{x}, \vec{x}') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \Phi \frac{\partial}{\partial n'} G_D(\vec{x}, \vec{x}') d\mathcal{A}'. \quad (16)$$

Tarea: Demostrar que $G_D(\vec{x}, \vec{x}') = G_D(\vec{x}', \vec{x})$ (ver Jackson 1.10)

.13

- Para Neumann, pedimos $G_N(\vec{x}, \vec{x}') = \langle \Phi \rangle_{\mathcal{A}}$ si $\vec{x}' \in \mathcal{A}$:

$$\Phi(\vec{x}) = \langle \Phi \rangle_{\mathcal{A}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{x}') G_N(\vec{x}, \vec{x}') d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_S G_N \frac{\partial}{\partial n'} \Phi(\vec{x}') d\mathcal{A}'. \quad (17)$$

.14

1.1.3- Ejemplo: función de Green para la esfera

- Queremos encontrar $\Phi(\vec{x})$ al exterior de una esfera de radio a , dado la distribución de potencial sobre la esfera.
- El método de imágenes da $\Phi(\vec{x})$ en el caso de una esfera a tierra ($\Phi = 0$), y con una fuente puntal q_1 en un punto \vec{x}_1 :

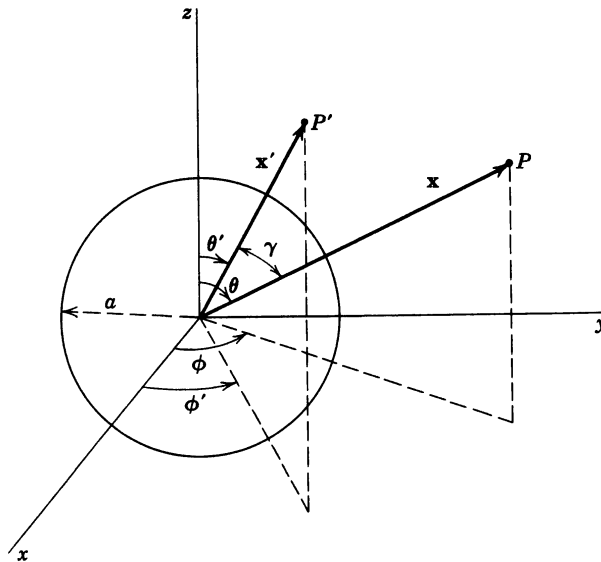
$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{x}_1\|} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{x}_2\|},$$

donde $\vec{x}_2 = \frac{a^2}{r_1} q_1$ (centramos la esfera en el origen y usamos coordenadas esféricas), y $q_2 = -aq_1/r_1$.

- Este potencial calza con los requisitos de la Función de Green para condición de borde Dirichlet, con $q_1 = 4\pi\epsilon_0$ y $\vec{x}' = \vec{x}_1$:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|} - \underbrace{\frac{a}{r' \|\vec{x} - \frac{a^2}{(r')^2} \vec{x}'\|}}_{F(\vec{x}, \vec{x}')} \quad (18)$$

.15



Pasando a coordenadas esféricas, tenemos,

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\gamma)}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2 r'^2}{a^2} + a^2 - 2rr' \cos(\gamma)}}, \quad (19)$$

donde es más fácil ver que $G(a\hat{x}, \vec{x}') = 0$.

.16

- Para usar el teorema de Green, también necesitamos

$$\left. \frac{\partial G_D}{\partial n'} \right|_{r'=a} \equiv \left. \frac{\partial G_D}{\partial r'} \right|_{r'=a} = \frac{r^2 - a^2}{a(r^2 + a^2 - 2ar \cos(\gamma))^{3/2}}.$$

- Ahora, usando Ec. 16, tenemos el potencial en cualquier punto afuera de la esfera (esta aplicación supone que no hay cargas en el exterior de la esfera):

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\mathcal{A}} \Phi(\theta', \phi') \frac{a(r^2 - a^2)}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos(\gamma))^{3/2}} \sin(\theta') d\theta' d\phi'. \quad (20)$$

- Aplicación: dos hemisferios con potencial $+V$ y $-V$.

.17

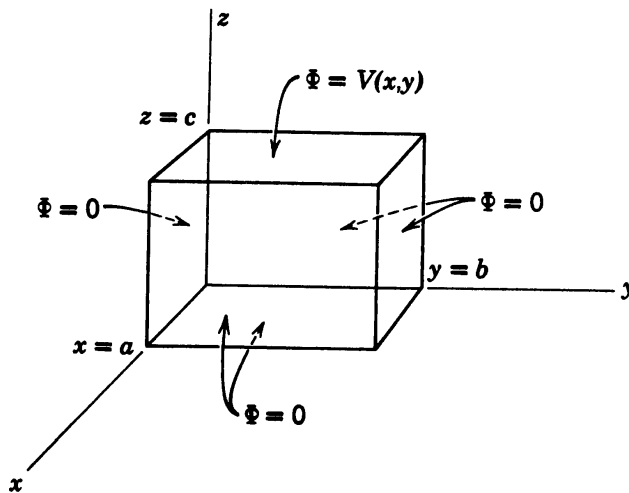
1.4. Separación de variables

- Otra alternativa para determinar $\Phi(\vec{x})$ es resolver la ecuación de Poisson directamente. En casos con simetrías o geometrías simples, se puede hacer analíticamente usando la técnica de separación de variables.
- Por ejemplo, si las condiciones de bordes se definen sobre planos, es conveniente buscar soluciones con separación de variables en coordenadas cartesianas:

$$\Phi(\vec{x}) = X(x)Y(y)Z(z).$$

.18

1.4.1. Condiciones de borde rectangulares



- Consideramos el problema descrito en la Fig., con $\Phi(z = c) = V(x, y)$, y $\Phi = 0$ en el resto de un rectángulo con lados a, b, c , y donde queremos determinar Φ en el interior del rectángulo.
- Vemos que la solución de este problema se puede extender a un potencial arbitrario en las 6 caras del cubo usando el teorema de superposición.

- Aplicando separación de variables, vemos que funciones del tipo

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{n,m} A_{n,m} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} z), \quad (21)$$

con $\alpha_n = n\pi/a$, $\beta_m = m\pi/b$, y $\gamma_{nm} = \pi\sqrt{(n/a)^2 + (m/b)^2}$, son soluciones de $\nabla^2\Phi = 0$ y cumplen con las condiciones de bordes en x , en y , y en $z = 0$.

- La última condición de borde $\Phi(z = c) = V(x, y)$ se obtiene aplicando la completitud en el análisis de Fourier,

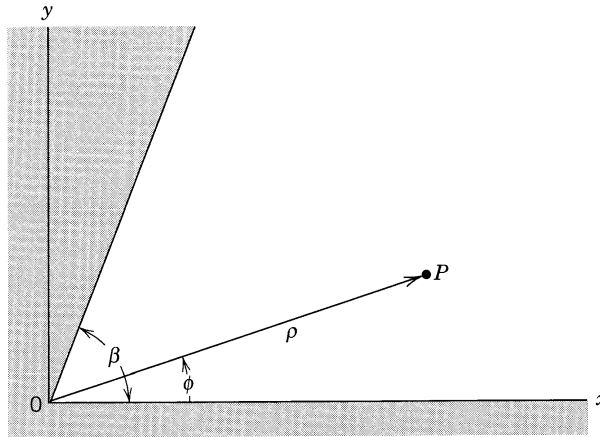
$$A_{n,m} \sinh(\gamma_{n,m}) = \frac{4}{ab} \int_0^b dy \int_0^a dx V(x, y) \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y).$$

- Como Ec. 21 cumple $\nabla^2\Phi = 0$ y las condiciones de bordes tipo Dirichlet, es la solución única.

1.4.2. Cilíndricas

Simetría en z , o polares.

- Como ejemplo de condición de borde en geometría cilíndrica consideramos un caso con simetría en z .



$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = 0.$$

- La técnica de separación de variables da:

$$\Phi(\rho, \phi) = V + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \rho^{m\pi/\beta} \sin(m\pi\phi/\beta).$$

- En la vecindad del vértice, $\rho \rightarrow 0$, y

$$\Phi(\rho, \phi) \sim V + a\rho^{\pi/\beta} \sin(\pi\phi/\beta).$$

- El campo eléctrico normal a la superficie conductora es

$$E_\phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = -\frac{a\pi}{\beta} \rho^{-1+\pi/\beta} \cos(\pi\phi/\beta),$$

y vemos que en el caso $\beta > \pi$ las cargas se acumulan en la punta.

.22

Caso general

- En general, en cilíndricas

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

- Separando variables $\Phi = R(\rho)Q(\phi)Z(z)$, se llega a

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0, \quad (22)$$

$$\frac{d^2 Q}{d\phi^2} + \nu^2 Q = 0, \quad (23)$$

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R = 0. \quad (24)$$

.23

- Un tipo de soluciones para la parte radial son las funciones de Bessel:

$$J_\nu(x) = (x/2)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j + \nu + 1)} (x/2)^{2j},$$

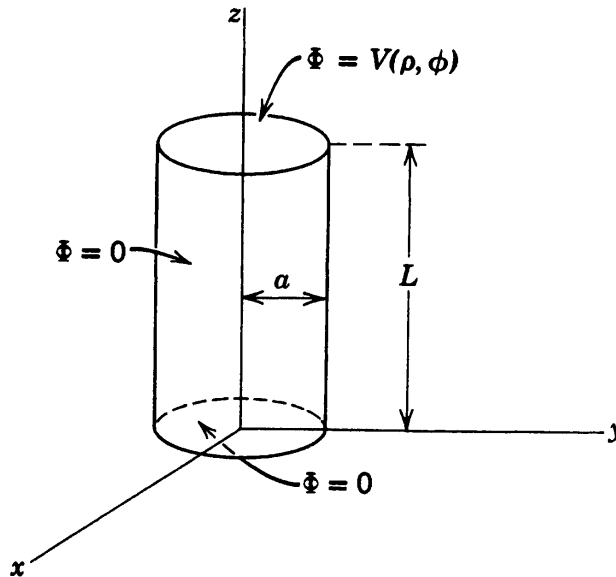
con $\Gamma(x) = \int_0^\infty dz z^{x-1} e^{-z}$, y $x = k\rho$. Otras soluciones linealmente independiente son las funciones de Neumann:

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}.$$

.24

Cilindro.

- Como ejemplo consideremos un cilindro con $\Phi = 0$, excepto en $z = L$, donde $\Phi = V(\rho, \phi)$.



.25

- Las condiciones de borde conducen a:

$$Q(\phi) = A \sin(m\phi) + B \cos(m\phi), \quad m \in \mathbb{Z}^+. \quad (25)$$

$$Z(z) = \sin(kz), \quad (26)$$

$$R(\rho) = C J_m(k\rho) + D N_m(k\rho) \quad (27)$$

- $D = 0$ porque $J_{-m}(k\rho)$ diverge con $\rho \rightarrow 0$.
- De $\Phi(\rho = a) = 0$, tenemos $J_m(ka) = 0$, $k = k_{mn} = x_{mn}/a$, donde los x_{mn} son las raíces de $J_m(x_{mn}) = 0$.

.26

- La forma general de la solución es entonces

$$\Phi(\rho, \phi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{mn}\rho) \sinh(z) (A_{mn} \sin(m\phi) + B_{mn} \cos(m\phi)). \quad (28)$$

- Con la condición de borde en $z = L$, se puede despejar los A_{mn} y B_{mn} usando análisis de Fourier, y también con la orthonormalidad de las funciones de Bessel,

$$\int_0^a d\rho \rho J_\nu(x_{mn}\rho/a) J_\nu(x_{m'n'}\rho/a) = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(x_{mn})]^2 \delta_{nn'}.$$

.27

1.4.3. Esféricas

- En coordenadas esféricas,

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0.$$

- Si ponemos $\Phi = \frac{U}{r} P(\theta) Q(\phi)$,

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = -m^2, \text{ con } m \in \mathbb{R} \text{ por determinar.}$$

- En r ,

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U = 0, \text{ con } l(l+1) \in \mathbb{R} \text{ por determinar,}$$

y cuya solución es

$$U(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l}.$$

.28

Polinomios de Legendre

- Luego de la separación de variables, la ecuación en θ es:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0,$$

donde $x = \cos(\theta)$, y cuya soluciones P se escriben en términos de las funciones asociadas de Legendre,

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m},$$

y de los polinomios de Legendre,

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l (x^2 - 1)^l}{dx^l}.$$

- En el intervalo $x \in [-1, 1]$, los $\{P_l(x)\}_{l=0}^{\infty}$, $l \in \mathbb{Z}^+$, forman un conjunto ortonormal,

$$\int_{x=-1}^{x=1} P_l(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll}. \quad (29)$$

.29

Armónicos Esféricos.

- Si se buscan soluciones regulares en todo \mathbb{R}^3 , es necesario que $l \in \mathbb{Z}^+$ para que $P_l(x)$ sea finita en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$, y también que $m = -l, -(l-1), \dots, 0, \dots, (l-1), l$.
- En este caso, es usual juntar las dependencias en θ y ϕ introduciendo los armónicos esféricos:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\phi}.$$

- Orthonormalidad:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (30)$$

- Completitud:

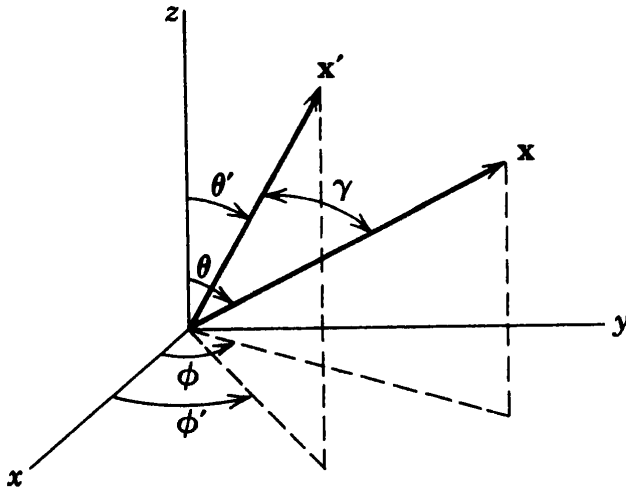
$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{l'm'}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta(\phi - \phi') \delta(\cos(\theta) - \cos(\theta')). \quad (31)$$

- Los armónicos esféricos cumplen también el Teorema de Adición (ver Jackson 3.6):

$$P_l(\cos(\gamma)) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (32)$$

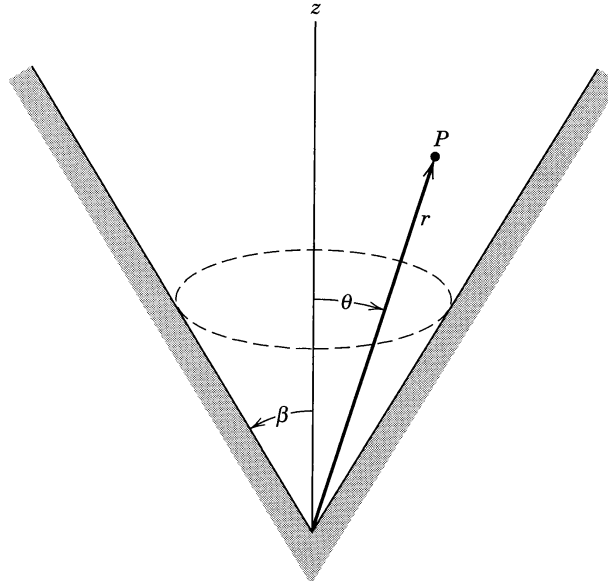
donde γ es el ángulo subtendido entre \vec{x}' y \vec{x} ,

$$\cos(\gamma) = \cos(\theta) \cos(\theta') + \sin(\theta) \sin(\theta') \cos(\phi - \phi').$$



Ejemplo: punta cónica.

- Consideremos una punta cónica en un conductor. Como no hay dependencia en ϕ , buscamos soluciones de Laplace cuya dependencia en θ sea del tipo $P_l(\cos(\theta))$. Pero no buscamos soluciones regulares en \mathbb{R}^3 , sino que solo en $\theta \in [0, \beta]$, y el índice de los polinomios de Legendre no es necesariamente un entero. Para distinguirlo de l , que se subentiende es entero, cambiamos de notación con $l \rightarrow \nu$.



- Para evitar divergencia en el origen, las soluciones son del tipo,

$$\phi(r, \theta) = Ar^\nu P_\nu(\cos(\theta)),$$

y como $\theta \in [0, \beta]$, ν puede ser cualquier real positivo¹.

- Usando la condición de borde, pedimos $P_\nu(\cos(\beta)) = 0$, con infinitas soluciones $\{\nu_k\}_{k=0}^\infty$,

$$\Rightarrow \Phi(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k r^{\nu_k} P_{\nu_k}(\cos(\theta)).$$

- Cerca del vértice, cuando $r \rightarrow 0$, domina la potencia mas chica de r^{ν_k} , y

$$\Phi(r, \theta) = Ar^{\nu_1} P_{\nu_1}(\cos(\theta)).$$

- Una aproximación del campo eléctrico cerca de una punta es entonces

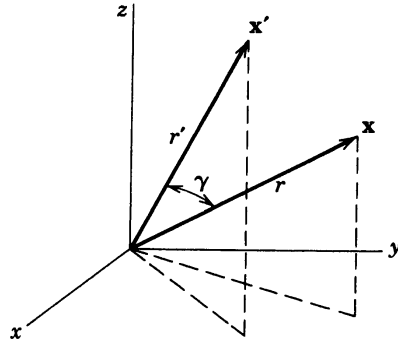
$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = Ar^{\nu-1} \sin(\theta) P'_\nu(\cos(\theta)),$$

y vemos que si $\beta \in [\pi/2, \pi]$, las cargas se acumulan en la punta (donde, técnicamente, divergen, en esta formulación con una punta infinitamente aguda).

¹si $\nu < 0$, P_ν diverge en 0

1.5. Expansiones de Funciones de Green

Expansión de Legendre del potencial de una carga puntual.



- El potencial debido a una carga puntual $q' = 4\pi\epsilon_0$ en \vec{x}' se puede escribir

$$\frac{1}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|} = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos(\gamma)).$$

(\dots) eligiendo $\vec{x} \propto \vec{x}'$, se pueden identificar los coeficientes, y (\dots) \Rightarrow

$$\frac{1}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|} = \frac{1}{r_{>}} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^l P_l \cos(\gamma).$$

.35

- Aplicando el teorema de adición,

$$\frac{1}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (33)$$

.36

Expansión esférica de funciones de Green: Ejemplo.

- Partimos con un ejemplo: el caso de la función de Green con un borde esférico en $r = a$ (Eq. 18),

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|} - \frac{a}{r' \|\vec{x} - \frac{a^2}{(r')^2} \vec{x}'\|}.$$

- Aplicamos Eq. 33 a ambos términos:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \frac{1}{2l+1} \left[\frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} - \frac{1}{a} \left(\frac{a^2}{rr'} \right)^{l+1} \right] Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (34)$$

.37

Expansión esférica de funciones de Green: Caso general.

- En general, demostraremos (ver cátedra) que $G(\vec{x}, \vec{x}')$ se puede expandir como

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} g_l(r, r') Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (35)$$

con

$$\frac{1}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} (r g_l(r, r')) - \frac{l(l+1)}{r^2} g_l(r, r') = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r'), \quad (36)$$

que tiene soluciones

$$g_l(r, r') = \begin{cases} Ar^l + Br^{-(l+1)} & \text{si } r < r', \\ A'r^l + B'r^{-(l+1)} & \text{si } r > r'. \end{cases} \quad (37)$$

Los coeficientes A, B, A', B' se determinan con las condiciones de borde, el requerimiento de que g_l sea simétrico, y las discontinuidades implicadas por la δ en $\nabla^2 G = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$.

.38

Expansión esférica de funciones de Green: Ejemplo, dos esferas concéntricas.

- Aplicamos al caso del volumen encerrado entre dos esferas concéntricas, con radios $a < b$.
- Para que se anule G en los bordes, pedimos $g_l(r = a, r') = 0$, y $g_l(r = b, r') = 0$. Concluimos que los coeficientes en Eq. 37 cumple $B/A = -a^{2l+1}$, y $B'/A' = -b^{2l+1}$.
- Para que $g_l(r, r') = g_l(r', r)$, escribimos:

$$g_l(r, r') = \underbrace{AA'}_{\sim C} \left(r_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r_{<}^{l+1}} \right) \left(r_{>}^l - \frac{b^{2l+1}}{r_{>}^{l+1}} \right).$$

- Para calcular C , integramos $\int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} \times \text{Eq. 36}$:

$$C = -4\pi / \{ (2l+1) (b^{2l+1} - a^{2l+1}) \}.$$

- La solución es entonces

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} C \left(r_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r_{<}^{l+1}} \right) \left(r_{>}^l - \frac{b^{2l+1}}{r_{>}^{l+1}} \right) Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (38)$$

.39

Aplicaciones.

Hay dos aplicaciones en Jackson 3.10:

- Anillo cargado dentro de una esfera hueca, conectada a tierra.
- Línea uniforme cargada dentro de una esfera hueca, conectada a tierra.

.40

Expansión de G en auto-funciones.

- En general, una ecuación del tipo

$$\nabla^2 \psi(\vec{x}) + [f(\vec{x}) + \lambda] \psi(\vec{x}) = 0,$$

solo tiene soluciones en un volumen \mathcal{V} , que cumplan condiciones de borde en la superficie \mathcal{S} , para ciertos valores $\{\lambda_n\}$, llamados *autovalores*. Las correspondientes soluciones $\{\psi_n\}$ son las *auto-funciones*.

- Resulta que

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x \psi_m^*(\vec{x}) \psi_n(\vec{x}) = \delta_{mn}.$$

- Si buscamos soluciones de

$$\nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') + [f(\vec{x}) + \lambda] G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (39)$$

con $\lambda \notin \{\lambda_n\}$, expandimos

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \sum_n a_n(\vec{x}') \psi_n(\vec{x}). \quad (40)$$

- Substitución de Eq. 40 en Eq. 39 da

$$\sum_n a_n(\vec{x}') (\lambda - \lambda_n) \psi_n(\vec{x}) = -4\pi \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (41)$$

- Tomamos $\int_{\mathcal{V}} d^3x \psi_m^*(\vec{x}') \times$ Eq. 41, para concluir que

$$a_m(\vec{x}') = 4\pi \psi_m^*(\vec{x}') / (\lambda_m - \lambda).$$

- Finalmente,

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = 4\pi \sum_n \frac{\psi_n^*(\vec{x}') \psi_n(\vec{x})}{\lambda_n - \lambda}. \quad (42)$$

Expansión de G en auto-funciones: Ejemplo.

- Busquemos la función de Green para un problema con bordes rectangulares, de lados a , b , y c .
- Queremos resolver Poisson, entonces $f(\vec{x}) = 0$, y $\lambda = 0$.
- La ecuación para autovalores es

$$\nabla^2 \psi_n + k_n^2 \psi_n = 0,$$

- Para el rectángulo se tiene, por separación de variables, que los autovalores son

$$k_n^2 \sim k_{lmn}^2 = \pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right),$$

y las autofunciones son

$$\psi_n \sim \psi_{lmn} = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{c}\right).$$

.41

.42

.43

- Usamos Eq. 42 con $\lambda = 0$:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{32}{\pi abc} \sum_{l,m,n} \frac{1}{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}} \left[\sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi x'}{a}\right) \right. \\ \left. \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi y'}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{c}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{c}\right) \right] \quad (43)$$

- **Tarea:** Aplicar esta función de Green al problema de Sec. 1.4.1, y confirmar que se obtiene el mismo $\phi(\vec{x})$ que por separación de variables.

.44

1.6. Multipolos

1.6.1. Momentos multipolares

- Consideramos una distribución de cargas $\rho(\vec{x})$ confinadas dentro de una esfera de radio r .
- El potencial en $r > R$ se puede expandir:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}}. \quad (44)$$

- Los q_{lm} son los *momentos multipolares*.

.45

- Para calcular los q_{lm} dada $\rho(\vec{x})$ sustituimos Ec. 33,

$$\frac{1}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi),$$

donde $r_{>}$ ($r_{<}$) es el mayor (menor) de r y r' , en Ec. 3,

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(\vec{x}') \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|},$$

y comparamos con Ec. 44.

- Concluimos que

$$q_{lm} = \int Y_{lm}^*(\theta', \phi') (r')^l \rho(\vec{x}') d^3x'. \quad (45)$$

.46

1.6.2. Campo dipolar eléctrico

- Escribimos los primeros q_{lm} en coordenadas cartesianas usando que $Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$ y $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta)$ y $Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta) \exp(i\phi)$:

$$q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} q, \quad (46)$$

$$q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y), \quad (47)$$

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z, \quad (48)$$

en que $\vec{p} = \int \vec{x}' \rho(\vec{x}') d^3x'$ es el momento dipolar eléctrico.

- **tarea:** recuperar la expansión hasta $l = 1$, escrita en cartesianas, usando la expansión de $(1/|\vec{x} - \vec{x}'|)$ a orden 1 en r'/r .

.47

- A orden 1, o bien para un dipolo $\vec{p} = p\hat{z}$,

$$E_r = \frac{2p \cos(\theta)}{\sqrt{4\pi\epsilon_0} r^3}, \quad (49)$$

$$E_\theta = \frac{2p \sin(\theta)}{\sqrt{4\pi\epsilon_0} r^3}, \quad (50)$$

$$E_\phi = 0. \quad (51)$$

- En general, para un dipolo \vec{p} ubicado en x_o ,

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{3\hat{n}(\vec{p} \cdot \hat{n}) - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}_o|}. \quad (52)$$

.48

1.7. Dieléctricos

1.7.1. Desplazamiento Eléctrico

Consideramos un medio compuesto por un continuo de átomos o moléculas, con K especies. La aplicación de un campo externo distorciona estos constituyentes, y desplaza las cargas de manera que cada especie adquiere un momento dipolar eléctrico \vec{p}_i .

- Definimos el campo de polarización eléctrica:

$$\vec{P}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^K n_i(\vec{x}) \langle \vec{p}_i \rangle,$$

en que $n_i(\vec{x})$ es la densidad de número de la especie i , y $\langle \vec{p}_i \rangle$ es el promedio de \vec{p}_i en un volumen microscópico $\delta\mathcal{V}$ centrado en \vec{x} .

.49

- El potencial $\delta\Phi(\vec{x})$ debido a un elemento de volumen $\delta\mathcal{V}'$ en \vec{x}' es entonces

$$\delta\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{x}')\delta\mathcal{V}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta\mathcal{V}'\vec{P}(\vec{x}') \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2}$$

- Sumando en todo el espacio,

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \left\{ \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{P}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \right\}, \text{ y}$$

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \frac{[\rho(\vec{x}') - \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{x}')]}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (53)$$

- En un dieléctrico el campo de polarización induce unas cargas efectivas de polarización, $\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$.

.50

- En un dieléctrico tenemos entonces que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} [\rho + \rho_P]. \quad (54)$$

- Con la introducción del campo vectorial *Desplazamiento Eléctrico*,

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (55)$$

tenemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho. \quad (56)$$

- Para un *medio lineal*, la respuesta en el campo de polarización bajo la influencia del campo externo es lineal,

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}, \text{ donde } \chi_e \text{ es la susceptibilidad eléctrica.} \quad (57)$$

- En un medio lineal tenemos una relación constitutiva entre \vec{D} y \vec{E} :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \text{ con } \epsilon \equiv \epsilon_0 [1 + \chi_e]. \quad (58)$$

- ϵ es la *permitividad eléctrica* del medio, y ϵ/ϵ_0 es su *constante dieléctrica*.

.51

- Si ϵ es uniforme, entonces $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon$, y toda la maquinaria vista en Secs. 1.1 a 1.5 es aplicable.
- Si hay variaciones de $\epsilon(\vec{x})$, hay que proceder caso por caso. En particular, en el caso de discontinuidades entre 2 medios, tenemos las condiciones de borde:

$$\begin{cases} \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1 \right) \cdot \hat{n}_{12} = \sigma \longleftarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \text{ y} \\ \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right) \times \hat{n}_{12} = 0, \longleftarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \end{cases} \quad (59)$$

donde \hat{n}_{12} es la normal a la interfaz dirigida del medio 1 al 2.

- **Tarea:** Ejemplos en Jackson 4.4.

.52

1.7.2. Modelos para la susceptibilidad eléctrica

- La polarización molecular, i.e. los dipolos eléctricos inducidos en una colección de átomos o moléculas, pueden resultar de
 1. el campo aplicado distorciona la distribución de cargas y produce un dipolo inducido,
 2. el campo aplicado tiende a alinear la orientación de dipolos eléctricos permanentes.
- Para el estimar el dipolo inducido, consideramos un modelo de oscilador armónico, en el que el desplazamiento en equilibrio es δ_x , de manera que $p_j = e_j \delta_x = e_j^2 E / (m_j \omega_j^2)$ para cada carga j en una molécula.

- Introducimos la polarizabilidad molecular γ con $\vec{p} = \epsilon_0 \gamma \vec{E}$, de manera que

$$\gamma = \sum_j \frac{e_j^2}{\epsilon_0 m_j \omega_j^2}. \quad (60)$$

- Interesantemente, la inclusión de la agitación térmica no cambio este resultado (ver demo en clase).

- Si existen dipolos permanentes \vec{p} , la aplicación de un campo externo Φ_e entrega energía electrostática al dipolo $W_p = \int d^3x \rho \Phi_e$, en que ρ describe las cargas del dipolo.
- Si el dipolo es pequeño en comparación con la escala de variación de Φ_e , el termino dominante es lineal, y

$$W_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}. \quad (61)$$

- Una aplicación de estadística de Boltzmann da que

$$\langle p_z \rangle \approx \frac{p^2 E}{2kT}. \text{ ojo: Jackson 4.81 tiene un factor 3, no 2.} \quad (62)$$

para un campo externo $\vec{E}_e \propto \hat{z}$, y si $\frac{pE}{kT} \ll 1$.

- En resumen, sumando las dos contribuciones, dipolo inducido y alineación,

$$\gamma \approx \frac{e^2 E}{\epsilon_0 m \omega^2} + \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{p^2}{kT}. \quad (63)$$

1.7.3. Energía en dieléctricos

- La auto energía almacenada en un dieléctrico se puede estimar sumando los trabajos necesarios para cada pequeño arreglo de cargas $\delta\rho$:

$$\delta W = \int_{\mathbb{R}^3} \delta\rho\Phi(\vec{x})d^3x.$$

- Con $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$, se llega a

$$\delta W = \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{E} \cdot \delta\vec{D})d^3x.$$

- Para un medio lineal, concluimos que

$$W = \frac{1}{2} \int d^3x \vec{E} \cdot \vec{D}. \quad (64)$$

- Recuperamos el resultado para la autoenergía de una distribución de cargas,

$$W = \frac{1}{2} \int d^3x \rho\Phi. \quad (65)$$

- Ejemplo: calcular el cambio de energía al introducir un dieléctrico con volumen \mathcal{V}_∞ en presencia de un campo eléctrico \vec{E} cuyas fuentes permanecen fijas en el espacio.
- En la configuración inicial, sin dieléctrico, $W_o = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \vec{E}_o \cdot \vec{D}_o d^3x$, mientras que con dieléctrico, tenemos $W_1 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} d^3x$.
- Para un medio lineal, y entiendo que las fuentes ρ permanecen fijas de manera que $\nabla \cdot \vec{D} - \nabla \cdot \vec{D}_o = 0$, la diferencia de energía $W = W_1 - W_o$ se puede escribir

$$W = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}_\infty} \vec{P} \cdot \vec{E}_o d^3x.$$

- La densidad de energía del dieléctrico, en estado caso particular con fuentes fijas, se puede escribir

$$\omega = -\frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E}_o,$$

que es reminicente de Ec. 61.

- La fuerza implicada en desplazamiento parametrizado por ξ sería entonces $F_\xi = - \left. \frac{\partial W}{\partial \xi} \right|_Q$, con fuentes Q fijas.

2. Magnetostática

2.1. Leyes de Bio & Savart y de Ampère

- Introducimos los efectos magnéticos acorde al desarrollo histórico, dejando pendiente la unificación relativista con el campo eléctrico.
- Experimentalmente, se observa que existen un campo \vec{B} , llamado campo magnético, que interactúa con corrientes de cargas de manera que el elemento de fuerza $d\vec{F}$ que actúa en un elemento de circuito $d\vec{l}_1$ con corriente I_1 es

$$d\vec{F} = I_1(d\vec{l}_1 \times \vec{B}). \quad (66)$$

(esta fuerza es el análogo a la fuerza de Lorentz, $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, desarrollada posteriormente).

- A su vez, \vec{B} también es generado por corrientes, de manera que un elemento de circuito $d\vec{l}_2$ con corriente I_2 induce un campo

$$d\vec{B}(\vec{x}) = kI_2 \frac{d\vec{l}_2 \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3},$$

donde $k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ en SI, mientras que $k = 1/c$ en CGS. Esta es la ley de Biot & Savart.

.57

- Relacionamos la corriente eléctrica con un campo densidad de corriente $\vec{J}(\vec{x}) = \rho(\vec{x})\vec{v}(\vec{x})$, tal que la intensidad de corriente que cruza una superficie S es

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}.$$

- Conservación de carga eléctrica implica que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \quad (67)$$

y en el caso estático $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$.

- Poniendo $d^3x' \sim d\vec{S}' \cdot d\vec{l}'$, la ley de Biot & Savart se puede escribir de una manera más general,

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \vec{J}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}. \quad (68)$$

.58

- Podemos reescribir Ec. 68:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (69)$$

y de esa forma resulta evidentemente que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

- Tomando el rotor de Ec. 69, y para el caso estacionario con $\nabla \cdot \vec{J} = 0$, llegamos a la Ley de Ampère:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_o \vec{J}. \quad (70)$$

- Aplicando el Teorema de Stokes podemos escribir Eq. 70 en forma integral:

$$\int_{\Gamma} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_o I. \quad (71)$$

- Por otro lado, usando la densidad de corriente \vec{J} podemos reescribir la fuerza magnética Ec. 66:

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int I_1 (d\vec{l}_1 \times \vec{B}) = \int \vec{J}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}) d^3x. \quad (72)$$

- Similarmente, el torque total es

$$\vec{N} = \int \vec{x} \times (\vec{J} \times \vec{B}) d^3x. \quad (73)$$

.59

.60

2.2. Potencial Vector

- En ausencia de corrientes, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$, y podemos introducir un *potencial escalar magnético* $\vec{B} = -\vec{\nabla} \phi_M$. Junto con $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ llegamos a Laplace, i.e. igual a electrostática.
- Otra forma de solución, más general, es introducir el potencial vector $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$,

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' + \vec{\nabla} \psi(\vec{x}), \quad (74)$$

donde $\vec{\nabla} \psi(\vec{x})$ refleja la libertad de *gauge* en la definición de \vec{A} .

- Si elegimos el gauge de Coulomb, con $\vec{\nabla} \psi(\vec{x}) = 0$, entonces $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ en estado estacionario (porque $\vec{\nabla} \cdot \left(\int d^3x' \vec{J}/(|x - x'|) \right) = 0$ ya que $\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{x}') = 0$).
- En el gauge de Coulomb, con validez general en magnetostática, llegamos a $\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_o \vec{J}$, o sea Poisson.

.61

- Ejemplo: campo generado por un anillo de corriente de radio a .
- La densidad de corriente es

$$\vec{J} = -J_\phi \sin(\phi)\hat{x} + J_\phi \cos(\phi)\hat{y},$$

con $J_\phi = I \sin(\theta)\delta(\cos(\theta))\delta(r - a)/a$.

- El potencial vector es azimuthal, con

$$A_\phi(r, \theta) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\phi')}{(a^2 + r^2 - 2ar \sin(\theta) \cos(\theta'))^{1/2}} d\phi'.$$

- Si $a \ll r$,

$$A_\phi(r, \theta) \approx \frac{\mu_0 m r \sin(\theta)}{4\pi(a^2 + r^2)^{3/2}}, \quad (75)$$

y

$$\left. \begin{aligned} B_r &\approx \frac{\mu_0}{2\pi} m \frac{\cos(\theta)}{r^3}, \\ B_\theta &\approx \frac{\mu_0}{4\pi} m \frac{\sin(\theta)}{r^3} \end{aligned} \right\} \quad \text{donde } m = \pi I a^2. \quad (76)$$

.62

2.3. Distribución localizada de corrientes

- Consideramos el caso en que $\vec{J}(\vec{x}')$ esta confinado al interior de una esfera de radio R , y evaluamos \vec{A} lejos en $r \gg R$.
- Expandimos a primer orden $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \approx \frac{1}{|\vec{x}|} + \vec{x} \cdot \vec{x}'/|\vec{x}|^3$, de manera que

$$\vec{A}_i \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\underbrace{\frac{1}{|\vec{x}|} \int J_i(\vec{x}') d^3 x'}_{\text{monopolo}} + \underbrace{\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \cdot \int J_i(\vec{x}') \vec{x}' d^3 x'}_{\text{dipolo}} + \dots \right] \quad (77)$$

- Se demuestra en magnetostática que $\int J_i(\vec{x}') d^3 x' = 0$ (ver cátedra). Por lo tanto el monopolo es nulo.

.63

- También se tiene que $\int (x'_i J_j + x'_j J_i) d^3 x' = 0$ (ver cátedra), con lo que se puede escribir

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}, \quad (78)$$

- Donde hemos (re)definido el momento magnético

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{x}' \times \vec{J}(\vec{x}') d^3 x'. \quad (79)$$

- La densidad de momento magnético es la *magnetización*,

$$\vec{M}(\vec{x}') = \frac{1}{2} \vec{x}' \times \vec{J}(\vec{x}'). \quad (80)$$

- Si integramos a lo largo de un circuito,

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint \vec{x} \times d\vec{l}, \quad (81)$$

y para un circuito plano, como $\frac{1}{2} |\vec{x} \times d\vec{l}| = d\mathcal{A}$, recuperamos $|\vec{m}| = IA$.

.64

- Para una distribución discreta de N cargas,

$$\vec{J}(\vec{x}) = \sum_{a=1}^N q_a \vec{v}_a \delta(\vec{x} - \vec{x}_a), \quad (82)$$

y

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N q_a (\vec{x}_a \times \vec{v}_a).$$

- Recordando que el momentum angular de una partícula es $\vec{L}_a = M_a (\vec{x}_a \times \vec{v}_a)$, y si las partículas tienen igual razón carga a masa,

$$\vec{m} = \frac{e}{2M} \vec{L}_T. \quad (83)$$

.65

- Para calcular el campo magnético del dipolo, tomamos rotor de Ec. 78, para llegar a

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \left[\frac{3\hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{x}|^3} \right], \quad (84)$$

donde $\hat{n} = \vec{x}/|\vec{x}|$.

.66

2.4. Energía de una distribución local de corrientes

- Seguimos con una distribución local de corrientes, confinada al interior de una esfera de radio R . Si el campo externo $\vec{B}(\vec{x})$ varía lentamente en la escala R , podemos expandir

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}(0) + (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \Big|_0 + \dots \quad (85)$$

- Volviendo a la fuerza sobre una distribución de cargas, de $\vec{F} = \int \vec{J}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}) d^3x$ (Ec. 72) tenemos (ver cátedra) que

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}). \quad (86)$$

- Vemos que \vec{F} deriva de un gradiente, y asociamos una energía potencial a la distribución local de cargas,

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}. \quad (87)$$

- Para el torque total, evaluamos Ec. 73,

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}(0). \quad (88)$$

.67

2.5. Ecuaciones macroscópicas

- Introducimos la densidad dipolar magnética, o *magnetización*,

$$\vec{M}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^K n_i \langle \vec{m}_i \rangle, \quad (89)$$

para K especies.

- Sumando la contribución de cada elto de volumen, llegamos a

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{\vec{M}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right] d^3x'. \quad (90)$$

- Usando los típicos trucos, llegamos a

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{J}(\vec{x}') + \vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{x}')] d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (91)$$

- La magnetización \vec{M} induce una densidad de corriente efectiva

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}. \quad (92)$$

.68

- Con las corrientes de magnetización, la Ley de Ampère Ec. 70 se modifica:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{M}). \quad (93)$$

- Introducimos un nuevo campo \vec{H} :

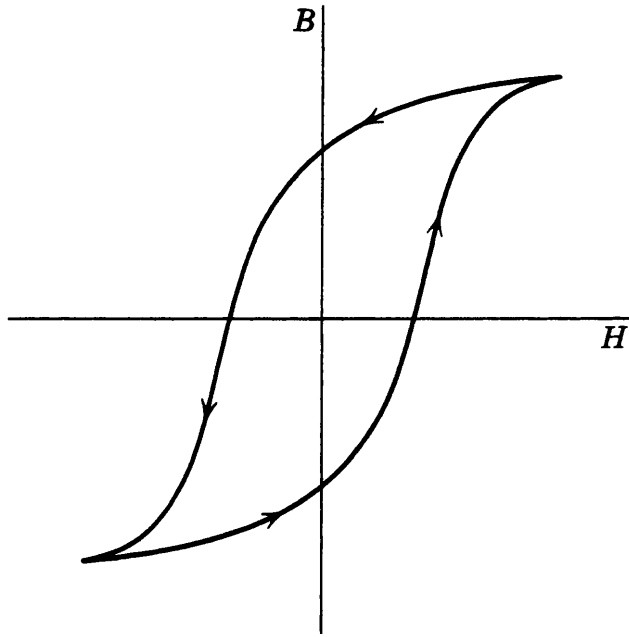
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}. \quad (94)$$

- Con \vec{H} , las ecuaciones de magnetostática en medios materiales son:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \end{cases} \quad (95)$$

.69

- Para completar la descripción matemática de magnetostática, necesitamos relacionar \vec{B} y \vec{H} . Si para campos débiles tenemos $\vec{B} \propto \vec{M}$, vemos que $\vec{B} = \mu\vec{H}$.
- Para campos intensos, o para materiales ferromagnéticos, tenemos el caso general $\vec{B} = f(\vec{H})$.
- Para materiales ferromagnéticos, existe una curva de *histéresis*.



- En presencia de una discontinuidad en μ , como en la interfaz entre dos medios, las ecuaciones de magnetostática dan:

$$\begin{cases} (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n}_{12} = 0, & \leftarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0, \text{ y} \\ (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \hat{n}_{12} = \vec{K}, & \leftarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{J}, \end{cases} \quad (96)$$

donde \hat{n}_{12} es la normal a la interfaz dirigida del medio 1 al 2.

2.6. Problemas con condiciones de borde en magnetostática

- En general, para resolver problemas con condiciones de bordes dadas (por ejemplo en el potencial vector), podemos aplicar lo visto en Sec. 2.2 a medios materiales. Con $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$, y $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, llegamos a

$$\nabla^2 \vec{A} = -\vec{J}. \quad (97)$$

- Si $\vec{J} = 0$, entonces $\nabla \times \vec{H} = 0$, y podemos escribir $\vec{H} = -\nabla\phi_M$. Con $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, y para medios lineales, llegamos a $\nabla^2\phi_M = 0$.

- Si $\vec{J} = 0$, y \vec{M} es fijo (i.e. para un medio ferromagnético en campos débiles, o sea no para medios lineales), ponemos $\vec{H} = -\vec{\nabla}\phi_M$.

- Con $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, y $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$, tenemos $\nabla^2\phi_M = -\rho_M$, con $\rho_M = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$.

- Las soluciones son entonces

$$\phi_M(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'.$$

- Un manejo estandar da

$$\phi_M(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \int \frac{\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'.$$

- Lejos de la región con \vec{M} , $\phi_M(\vec{x}) \approx -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \int \vec{M}(\vec{x}') d^3x'$, y

$$\phi_M(\vec{x}) = \frac{\vec{m} \cdot \vec{x}}{4\pi r^3}.$$

- Ejemplo: Esfera uniformemente magnetizada (ver aux, Sec. 5.10, 5.11 Jackson)

.73

2.7. Inducción y Energía Magnética

- Para estimar la energía almacenada en un sistema de corrientes necesitamos considerar el período transiente, desde la ausencia inicial de corrientes hasta el arreglo final.
- En electrostática la construcción de un arreglo de cargas se puede conseguir cuasiestáticamente. Pero en magnetismo, al cambiar las corrientes y los campos magnéticos aparece una *fuerza electromotriz* (fem) que se opone al cambio,

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}' \cdot d\vec{l}, \quad (98)$$

donde integramos a lo largo de un circuito, en el cual las cargas sienten una fuerza $q\vec{E}'$. Usamos las primas para indicar que es la fuerza aplicada en el sistema del circuito en desplazamiento.

.74

- Los experimentos de Faraday muestran que

$$\mathcal{E} = -k \frac{dF}{dt}, \quad (99)$$

donde F es el flujo magnético que permea el circuito,

$$F = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad (100)$$

y k es una constante.

.75

- Veamos que $k = 1$ en S.I. usando relatividad (Galileana suficiente).
- Si consideramos un circuito en translación uniforme con velocidad \vec{v} , escribimos (ver cátedra) que

$$\frac{dF}{dt} = \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathcal{A}} + \oint_C (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l}. \quad (101)$$

- Aplicando Ec. 99,

$$\oint \left[\vec{E}' - k(\vec{v} \times \vec{B}) \right] \cdot d\vec{l} = -k \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathcal{A}}. \quad (102)$$

- Similarmente, en el sistema Lab., podemos escribir Ec. 99, en un circuito cerrado instantáneamente coincidente con C :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -k \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathcal{A}}. \quad (103)$$

- Concluimos $\vec{E}' = k(\vec{v} \times \vec{B}) + \vec{E}$, y comparando con la Fuerza de Lorentz, identificamos $k = 1$ en S.I.

.76

- Tenemos entonces la ley de Faraday,

$$\mathcal{E} = -\frac{dF}{dt}. \quad (104)$$

- En forma diferencial (aplicar a un circuito fijo pero arbitrario), se llega a (ver cátedra),

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (105)$$

.77

- Para escribir la energía almacenada en levantar un arreglo de corrientes, consideramos el trabajo necesario para compensar las fuerzas electromagnéticas inducidas (es decir no consideramos pérdidas Ohmicas).

- La potencia ejercida por las fuerza electromotrices inducidas $\vec{\mathcal{F}}$ es $\vec{v} \cdot \vec{\mathcal{F}} = q\vec{v} \cdot \vec{E}'$.

- La potencia total ejercida sobre todas las cargas en un circuito es entonces

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\rho d^3x \vec{v} \cdot \vec{E}') = \int d^3x \vec{J} \cdot \vec{E}' = \oint d\vec{l} \cdot \vec{E}' = I\mathcal{E}.$$

- Entonces, la potencia necesaria para compensar las fuerzas electromotrices es entonces

$$P = \frac{dW}{dt} = -I\mathcal{E} = I\frac{dF}{dt}. \quad (106)$$

- El trabajo requerido para compensar un cambio de flujo δF es,

$$\delta W = I\delta F \quad (107)$$

y si el circuito se mantiene fijo, $\delta W = I \int \delta \vec{B} \cdot d\vec{\mathcal{A}}$.

.78

- Usando Stokes y $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$,

$$\delta W = I \oint \delta \vec{A} \cdot d\vec{l}. \quad (108)$$

- Si el circuito tiene sección $\Delta\sigma$, con $I = J\Delta\sigma$ y $d^3x = \Delta\sigma \times d\vec{l}$, pasamos a una integral de volumen,

$$\delta W = \int d^3x \vec{J} \cdot \delta \vec{A}. \quad (109)$$

- Usamos ahora la Ley de Ampère $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$,

$$\delta W = \int d^3x \vec{H} \cdot \delta \vec{B}. \quad (110)$$

- Para un medio lineal, $\vec{B} = \mu\vec{H}$, y $\vec{H} \cdot \delta \vec{B} = \frac{1}{2}\delta(\vec{H} \cdot \vec{B})$.
- Llegamos a

$$W = \frac{1}{2} \int d^3x \vec{H} \cdot \vec{B}. \quad (111)$$

- Podemos relacionar la energía magnética con las corrientes en un arreglo de N circuitos. Usamos Ec. 108, $\delta W = I \oint \delta \vec{A} \cdot d\vec{l}$, y recordamos que

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

para ver que $\vec{A} \propto \vec{J}$, y $\vec{J} \cdot \delta \vec{A} = \frac{1}{2}\delta\vec{J} \cdot \vec{A}$.

- Entonces, $W = \frac{1}{2} \int \vec{J} \cdot \vec{A} d^3x$,

$$W = \frac{\mu_0}{8\pi} \int d^3x d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}) \cdot \vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (112)$$

- Separamos la integral en Ec. 81 en una sumatoria sobre los circuitos,

$$W = \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{i=1}^N \int d^3x_i \sum_{j=1}^N \int d^3x'_j \frac{\vec{J}(\vec{x}_i) \cdot \vec{J}(\vec{x}'_j)}{|\vec{x}_i - \vec{x}'_j|}.$$

- A su vez, separamos las sumatorias en los casos $i = j$ y $i \neq j$, para llegar a

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_i I_i^2 + \sum_{i,j,i \neq j} M_{ij} I_i I_j, \quad (113)$$

donde

$$L_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{I_i^2} \int d^3x_i \int d^3x'_i \frac{\vec{J}(\vec{x}_i) \cdot \vec{J}(\vec{x}'_i)}{|\vec{x}_i - \vec{x}'_i|}, \text{ y} \quad (114)$$

$$M_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{I_i I_j} \int d^3x_i \int d^3x'_j \frac{\vec{J}(\vec{x}_i) \cdot \vec{J}(\vec{x}'_j)}{|\vec{x}_i - \vec{x}'_j|}, \quad (115)$$

- También podemos llegar a Ec. 113 considerando que el flujo que permea el circuito i debe ser proporcional a las corrientes:

$$F_i = L_i I_i + \sum_{j \neq i} M_{ij} I_j. \quad (116)$$

- Vimos que $\delta W_i = I_i \delta F_i$ (Ec. 107), entonces

$$\delta W_i = I_i L_i \delta I_i + \sum_{i \neq j} M_{ij} I_j \delta I_i,$$

e integrando llegamos a Ec. 113.