

Parte II

Ondas electromagnéticas y radiación

Índice

II	1
1. Ondas electromagnéticas	1
1.1. Ecuaciones de Maxwell	1
1.2. Potenciales retardados	3
1.3. Teorema de Poynting	6
2. Propagación de Ondas	8
2.1. Descomposición Espectral	8
2.2. Polarización	9
2.3. Relaciones constitutivas	11
2.4. Relaciones de Kramers-Kronig	12
2.5. Propagación en un medio	13
3. Radiación	14
3.1. Zona de ondas	14
3.2. Radiación dipolar	15
4. Scattering y difracción	18
4.1. Scattering en régimen de Rayleigh	18
4.2. Scattering por N blancos	20
4.3. Difracción	21
5. Relatividad	23
5.1. Cuadrivectores	23
5.2. Covarianza en electrodinámica	25

1. Ondas electromagnéticas

1.1. Ecuaciones de Maxwell

Corriente de desplazamiento

- La continuidad para la densidad de carga ρ se escribe $\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot \vec{J} = 0$.

- Pero tomando divergencia de la ley de Ampère

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{H}}_{\vec{J}} \right) = 0,$$

y tenemos una inconsistencia en el caso dinámico.

- Arreglamos la Ley de Ampère sumando la corriente de desplazamiento $\partial \vec{D} / \partial t$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \longrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

.3

Ecuaciones de Maxwell

- En resumen, las ecuaciones que describen la electrodinámica son:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (4)$$

- Para medios lineales, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ y $\vec{B} = \mu \vec{H}$.
- En el vacío, $\epsilon = \epsilon_0$ y $\mu = \mu_0$.

.4

Potenciales en electrodinámica

- Como $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, seguimos con $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.
- Para \vec{E} , tomamos Ec. 3,

$$\vec{\nabla} \times \left(\underbrace{\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{\equiv -\vec{\nabla} \Phi} \right) = 0, \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

.5

Ecuaciones para potenciales

- Queremos escribir las ecuaciones que rigen los potenciales \vec{A} y Φ .
- Usando las Ecuaciones de Maxwell en vacío (para conectar directamente con \vec{E} y \vec{B}), tenemos,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (5)$$

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu_0} \vec{B} = \vec{J} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \underbrace{\vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)}_{\text{término para Condición de Lorentz}} = -\mu_0 \vec{J}. \quad (6)$$

término para Condición de Lorentz

- Vemos que si el término destacado en Ec. 6 se anula, que sería la *Condición de Lorentz*, recuperamos la ecuación de ondas para \vec{A} :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

.6

- Con la condición de Lorentz (Ec. 7),

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (8)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}. \quad (9)$$

- Para cumplir la condición de Lorentz, usamos la libertad de Gauge:

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda, \quad (10)$$

que deja invariante $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

- Para preservar también $\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \partial \vec{A} / \partial t$, es necesario que

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}. \quad (11)$$

.7

- Si tenemos \vec{A} y Φ que cumplen con las ecuaciones para potenciales en general (Ecs. 6 y 5), pero no cumplen la condición de Lorentz, podemos entonces buscar un $\Lambda(\vec{x}, t)$ tal que \vec{A}' y Φ' cumplan la condición.
- Inyectando Ecs. 10 y 11 en Ec. 7, llegamos a una ecuación para $\Lambda(\vec{x}, t)$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0. \quad (12)$$

.8

1.2. Potenciales retardados

Ecuación de Helmholtz

- Para poder determinar $\vec{A}(\vec{x}, t)$ y $\Phi(\vec{x}, t)$, debemos resolver la ecuación de ondas con términos fuentes. Para un campo genérico $\Psi(\vec{x}, t)$:

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\vec{x}, t). \quad (13)$$

- Es conveniente pasar al dominio de Fourier en tiempo, para $g = \Psi$ $g = f$,

$$g(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (14)$$

con inversa,

$$g(\vec{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{x}, t) e^{i\omega t} dt. \quad (15)$$

- Usando la expansión Ec. 14 en Ec. 13, llegamos a la Ec. de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2) \Psi(\vec{x}, \omega) = -4\pi f(\vec{x}, \omega). \quad (16)$$

.9

Función de Green para la Ecuación de Ondas

- La Ecuación de Helmholtz Ec. 16 es muy parecida a la Ec.de Poisson, y podemos anticipar el uso de la misma maquinaria para resolverla. La función de Green satisface:

$$(\nabla^2 + k^2)G_k(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x}, \vec{x}'). \quad (17)$$

- Si cambiamos a un sistema con origen en \vec{x}' , vemos que la Ec. 17 tiene simetría esférica, y $G_k(\vec{x}, \vec{x}') = G_k(R)$, con $R = |\vec{R}|$ y $\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}'$
- La Ec. 17 se escribe entonces

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2}(R G_k) + k^2 G_k = -4\pi\delta(\vec{R}). \quad (18)$$

- Si $R \neq 0$, la solución de Ec. 18 es $R G_k = A e^{ikR} + B e^{-ikR}$, donde las constantes A y B no depende de k . Para determinarlas, usamos el caso $k = 0$, Poisson, con solución $G_{k=0}(R) = 1/R$, $\rightarrow A + B = 1$.
- La solución general de Ec.18 se puede escribir

$$G_k(R) = A G_k^+(R) + B G_k^-(R), \text{ con } G_k^\pm = \frac{e^{\pm ikR}}{R} \quad \text{y } A + B = 1. \quad (19)$$

.10

- Los valores de A y B dependen de las condiciones iniciales o de las condiciones de borde en el tiempo. Para verlo, volvemos al eje de tiempo y generalizemos la Ec. 17:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \right) G^\pm(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta(t - t'). \quad (20)$$

- Ahora, volviendo al eje de frecuencias ω , generalizamos Ec. 17 a

$$(\nabla^2 + k^2)G_k(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x}, \vec{x}')e^{i\omega t'}, \quad (21)$$

con soluciones $G_k^\pm(R)e^{i\omega t'}$.

- Para volver nuevamente al eje de tiempo, usamos Ec. 14, y

$$G^\pm(R; t, t') = G^\pm(R, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{\pm ikR - i\omega\tau}}{R} d\omega,$$

con $\tau = t - t'$.

.11

Función de Green para la Ecuación de Ondas

- Para un medio no dispersivos (con $\omega/k = c$), finalmente llegamos a

$$G^\pm(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \frac{\delta\left(t' - \left[t \mp \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right]\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (22)$$

- Aplicamos esta función de Green para encontrar las soluciones genéricas de Ec. 13:

$$\Psi^\pm(\vec{x}, t) = \int d^3x' dt' G^\pm(\vec{x}, t; \vec{x}', t') f(\vec{x}', t'). \quad (23)$$

- El caso $+$ corresponde a la solución retardada, con condición de entrada (valida antes de que f se active) ψ_{in} :

$$\Psi(\vec{x}, t) = \Psi_{\text{in}}(\vec{x}, t) + \int d^3x' dt' G^+(\vec{x}, t; \vec{x}', t'), \quad (24)$$

mientras que el caso $-$ corresponde a la solución adelantada, con condición de salida Ψ_{out} (después de que f se desactive),

$$\Psi(\vec{x}, t) = \Psi_{\text{out}}(\vec{x}, t) + \int d^3x' dt' G^-(\vec{x}, t; \vec{x}', t'), \quad (25)$$

.12

Potenciales retardados

- Normalmente se usa la solución retardada, con condición inicial $\Psi_{\text{in}} = 0$, y en la notación compacta

$$\Psi(\vec{x}, t) = \int d^3x' \frac{[f(\vec{x}', t')]_{\text{ret}}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (26)$$

donde $[(\dots)]_{\text{re}}$ significa evaluar en $t' = t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c$.

- Aplicando a los potenciales,

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{[\rho(\vec{x}', t')]_{\text{ret}}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (27)$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{[\vec{J}(\vec{x}', t')]_{\text{ret}}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (28)$$

.13

Potenciales retardados

- Para calcular \vec{E} y \vec{B} , podemos usar $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ y $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.
- Alternativamente, usando las ecuaciones de Maxwell llegamos a (**area**):

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \left(-\vec{\nabla}\rho - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \right), \quad (29)$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{J}. \quad (30)$$

- Aplicando nuevamente las soluciones de la ecuación de ondas con fuentes, tenemos

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{1}{R} \left[-\vec{\nabla}' \rho - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t'} \right]_{\text{ret}}, \quad (31)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{1}{R} \left[\vec{\nabla}' \times \vec{J} \right]_{\text{ret}}. \quad (32)$$

.14

Potenciales retardados

- Las expresiones para los campos retardados Ecs. 31 y 33 se pueden escribir de una forma que conecta directamente con las expresiones estáticas (**tarea**):

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \left\{ \frac{\hat{R}}{R^2} [\rho(\vec{x}', t')]_{\text{ret}} + \frac{\hat{R}}{cR} \left[\frac{\partial \rho(\vec{x}', t')}{\partial t} \right]_{\text{ret}} - \frac{1}{c^2 R} \left[\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \right]_{\text{ret}} \right\} \quad (33)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \left\{ \left[\vec{J}(\vec{x}', t') \right]_{\text{ret}} \times \frac{\hat{R}}{R^2} + \left[\frac{\partial \vec{J}(\vec{x}', t')}{\partial t} \right]_{\text{ret}} \times \frac{\hat{R}}{cR} \right\} \quad (34)$$

.15

1.3. Teorema de Poynting

- Vimos que la potencia ejercida por el campo (\vec{E}, \vec{B}) sobre las cargas en un volumen \mathcal{V} es

$$P = \int_{\mathcal{V}} \vec{J} \cdot \vec{E} d^3x. \quad (35)$$

- Queremos conectar P con la energía almacenada en los campos. Usando la Ec. de Ampère-Maxwell, despejamos \vec{J} , y luego de un manejo estandar,

$$P = \int_{\mathcal{V}} \left[-\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] d^3x. \quad (36)$$

- Usando ahora la Ley de Inducción (i.e. Faraday), $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$,

$$P = \int_{\mathcal{V}} \left[-\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] d^3x. \quad (37)$$

.16

- Recordando que para un medio lineal $\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} \cdot \vec{B}$, y $\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \cdot \vec{D}$, llegamos a

$$P = \int_{\mathcal{V}} \vec{J} \cdot \vec{E} d^3x = - \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \right] d^3x, \quad (38)$$

donde reconocemos

$$u = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}, \quad (39)$$

y

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (40)$$

- Para cualquier volumen \mathcal{V} , concluimos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{J} \cdot \vec{E}. \quad (41)$$

- De la misma manera que escribimos la continuidad de la energía electromagnética, Ec. 41, también podemos escribir la conservación de momentum lineal. La 2da ley de Newton para la variación del momentum lineal $\delta \vec{p}_{\text{mec}}$ de un volumen $\delta \mathcal{V}$ se escribe:

$$\frac{d \delta \vec{p}_{\text{mec}}}{dt} = \rho \vec{E} \delta \mathcal{V} + \rho \vec{v} \times \vec{B} \delta \mathcal{V}. \quad (42)$$

- En total,

$$\frac{d \vec{p}_{\text{mec}}}{dt} = \int_{\mathcal{V}} d^3x (\rho \vec{E} + \rho \vec{v} \times \vec{B}). \quad (43)$$

- Reemplazando ρ y \vec{J} usando las ecuaciones de Maxwell, se llega a (tarea):

$$\frac{d}{dt} (\vec{p}_{\text{mec}} + \vec{p}_{\text{campos}})|_i = \sum_j \int_{\mathcal{V}} d^3x \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad (44)$$

con las siguiente notaciones:

$$\vec{p}_{\text{campos}} = \int \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) d^3x = \frac{1}{c^2} \int d^3x \vec{S}, \quad (45)$$

que asociamos al momentum en los campos ya que cumple un rol parecido a \vec{p}_{mec} , y

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left[E_i E_j + c^2 B_i B_j - \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{E} + c^2 \vec{B} \cdot \vec{B}) \delta_{ij} \right], \quad (46)$$

que es el Tensor de tensiones electromagnéticas.

- Para cada componente i el integrando de T_{ij} se puede ver como una divergencia, y llegamos a

$$\frac{d}{dt} (\vec{p}_{\text{mec}} + \vec{p}_{\text{campos}})|_i = \oint_{\mathcal{S}} \sum_j T_{ij} n_j d\mathcal{A}, \quad (47)$$

donde reconocemos un flujo en la integral de superficie.

.17

.18

.19

2. Propagación de Ondas

2.1. Descomposición Espectral

- En ausencia de fuentes, si descomponemos

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \vec{E}(\vec{x}, \omega) e^{i\omega t}, \quad (48)$$

las ecuaciones de Maxwell dan

$$(\nabla^2 + \mu\epsilon\omega^2) \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0. \quad (49)$$

- Si ϵ y μ son reales, las soluciones se escriben $e^{\pm ikx}$, con $k = \sqrt{\mu\epsilon\omega}$
- Definimos la velocidad de fase $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$, donde $n = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}}$ es el índice de refracción.
- Vemos que en general,

$$\begin{Bmatrix} E_i \\ B_i \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_i \\ \mathcal{B}_i \end{Bmatrix} e^{\pm i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t}, \quad (50)$$

.20

- Reconocemos la solución de d'Alembert,

$$\begin{Bmatrix} E_i \\ B_i \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_i \\ \mathcal{B}_i \end{Bmatrix} e^{\pm ik(\vec{n}\cdot\vec{x} - v_\phi t)}, \quad (51)$$

donde cada componente i es de la forma $f(\hat{n}\cdot\vec{x} - v_\phi t) + g(\hat{n}\cdot\vec{x} + v_\phi t)$, y donde reconocemos \hat{n} como la dirección de propagación.

- Usando las ecuaciones de Maxwell llegamos a (tarea) $\hat{n}\cdot\vec{\mathcal{E}} = 0$, $\hat{n}\cdot\vec{\mathcal{B}} = 0$ y $\vec{\mathcal{B}} = \frac{n}{c}\hat{n}\times\vec{\mathcal{E}}$.

.21

- Para campos armónicos es usual trabajar en notación compleja (debido a la descomposición espectral), de manera que $\vec{S} = \Re(\vec{E}) \times \Re(\vec{H})$.
- En general para productos del tipo

$$\Re(ae^{-i\omega t})\Re(be^{-i\omega t}) = \frac{1}{2}\Re(a^*b + abe^{-2i\omega t}), \quad (52)$$

se suele tomar promedio temporal $\langle(\dots)\rangle_T = \lim_{T\rightarrow\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\dots) dt$, ya que

$$\langle\Re(ae^{-i\omega t})\Re(be^{-i\omega t})\rangle = \frac{1}{2}\Re(a^*b). \quad (53)$$

- Tenemos entonces

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\mathcal{E}|^2 \hat{n}. \quad (54)$$

Y similarmente

$$\langle u \rangle = \frac{1}{4} (\epsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \frac{1}{\mu} \vec{B} \cdot \vec{B}^*) = \frac{\epsilon}{2} |\mathcal{E}|^2. \quad (55)$$

- Finalmente, $\langle \vec{S} \rangle = v_\phi u$.

.22

2.2. Polarización

- En resumen, el campo eléctrico en una onda monocromática se decompone en dos ondas polarizadas linealmente,

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = (\hat{\epsilon}_1 E_1 + \hat{\epsilon}_2 E_2) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (56)$$

cuya resultante, en general, describe una onda polarizada elípticamente.

- Con un cambio de base a $\hat{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\epsilon}_1 \pm \hat{\epsilon}_2)$, descomponemos \vec{E} en dos ondas polarizadas circularmente,

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = (\hat{\epsilon}_+ E_+ + \hat{\epsilon}_- E_-) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}. \quad (57)$$

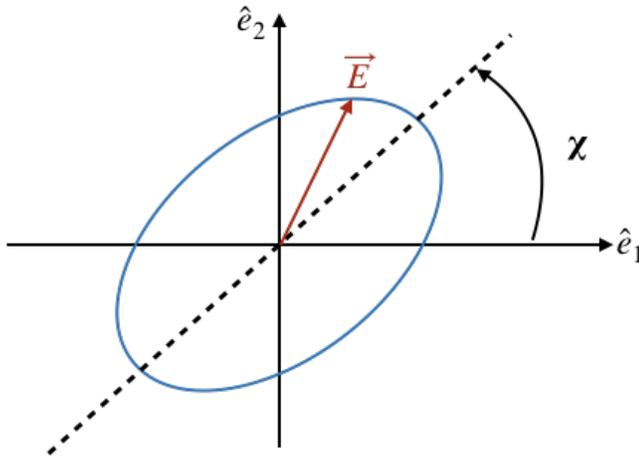
.23

- Con la notación

$$\begin{aligned} E_1 &= \mathcal{E}_1 e^{i\phi_1}, & E_2 &= \mathcal{E}_2 e^{i\phi_2}, \\ E_+ &= \mathcal{E}_+ e^{i\phi_+}, & E_- &= \mathcal{E}_- e^{i\phi_-}, \end{aligned}$$

- tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Polarización lineal : } \phi_y - \phi_x = 0. \\ \text{Polarización circular : } |\phi_y - \phi_x| = \frac{\pi}{2} \text{ y } \mathcal{E}_y = \mathcal{E}_x. \\ \text{El caso general es elíptico, con : } \tan(\chi) = \frac{\mathcal{E}_x \cos(\phi_x)}{\mathcal{E}_y \cos(\phi_y)}. \end{array} \right.$$



.24

- Llegamos a la definición de los parámetros de Stokes para caracterizar el estado de polarización de **luz monocromática**:

$$\begin{aligned}
I &= E_1 E_1^* + E_2 E_2^* = \mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2, \\
Q &= E_1 E_1^* - E_2 E_2^* = \mathcal{E}_1^2 - \mathcal{E}_2^2, \\
U &= E_1 E_2^* - E_2 E_1^* = 2\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1), \\
V &= i(E_1 E_2^* - E_2 E_1^*) = 2\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \sin(\phi_2 - \phi_1).
\end{aligned} \tag{58}$$

- Vemos que la irradiancia (Stokes I) es $I \propto |\vec{S}|$, Q y U miden polarización lineal, mientras que V mide polarización circular.
- Para ver la conexión con polarización, usamos experimentos mentales con polarizadores que seleccionan un tipo de polarización (ver cátedra).

.25

- Para obtener $\vec{E}(\vec{x}, \omega)$, se necesita conocer $\vec{E}(t)$ para todo t , ya que

$$\vec{E}(\vec{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\vec{x}, t) e^{i\omega t} dt. \tag{59}$$

- En la práctica, consideramos E_1 y E_2 como variables aleatorias, i.e. para una onda en vacío, descrita por Ec. 56,

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = (E_1(t)\hat{e}_1 + E_2(t)\hat{e}_2) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}. \tag{60}$$

Alternativamente podemos reemplazar la dependencia temporal con una densidad de probabilidad, que a su vez podría depender del tiempo.

- Para fijar ideas, recordemos que $\Delta t \Delta \omega = 1$ para espectros Gaussianos, donde Δt es el ‘tiempo de coherencia’, y $\Delta \omega$ es el ‘ancho de banda’ de la onda cuasi-monocromática.

.26

- Para medir los parámetros de Stokes, necesitamos promedios del tipo:

$$\langle E_1 E_2^* \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int dt E_1(t) E_2^*(t) dt. \tag{61}$$

- Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\langle Q^2 \rangle + \langle U^2 \rangle + \langle V^2 \rangle &= \langle I^2 \rangle - \\
&4(\langle \mathcal{E}_1^2 \rangle \langle \mathcal{E}_2^2 \rangle - \langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 e^{i(\phi_2 - \phi_1)} \rangle \langle \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 e^{-i(\phi_2 - \phi_1)} \rangle),
\end{aligned} \tag{62}$$

y

$$I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2. \tag{63}$$

.27

2.3. Relaciones constitutivas

- Consideramos ahora que cada componente monocromática del campo \vec{E}, \vec{B} debe cumplir relaciones constitutivas,

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \epsilon_0 \chi \vec{E} &\longrightarrow & \vec{P}(\omega) = \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}(\omega), \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} &\longrightarrow & \vec{B}(\omega) = \mu(\omega) \vec{H}(\omega), \\ \vec{J} &= \sigma \vec{E} &\longrightarrow & \vec{J}(\omega) = \sigma(\omega) \vec{E}(\omega),\end{aligned}\quad (64)$$

donde hemos agregado la Ley de Ohm.

- Notemos que $\chi(-\omega) = \chi^*(\omega)$, para que $\chi(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \chi(\omega) \exp(-i\omega t)$ sea real (y similarmente para μ y σ).

.28

- Recordemos el teorema de convolución: si $X(\omega) = Y(\omega)Z(\omega)$, entonces

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(t-t')Z(t')dt', \quad (65)$$

donde $Y(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega Y(\omega) \exp(-i\omega t)$, etc..

- Si aplicamos el teorema de convolución a χ (por ejemplo),

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')E(t')dt', \text{ con} \quad G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_0 \chi(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (66)$$

.29

- Vemos que $P(t)$ depende de la historia de $\vec{E}(t')$, lo cual tiene sentido físico solo en el pasado, para $t' < t$.
- Esta vez escribimos una onda monocromática con

$$\vec{E}(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = \Re(\vec{E}_c(t)), \quad (67)$$

con $\vec{E}_c = (A + iB)(\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t))$.

- En el eje de Fourier,

$$E(\omega) = \pi [(A + iB)\delta(\omega - \omega_0) + (A - iB)\delta(\omega + \omega_0)], \text{ y} \quad (68)$$

$$P(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_0 \chi(\omega) E(\omega) e^{-i\omega t} dt, \quad (69)$$

y usando que $\chi(-\omega) = \chi^*(\omega)$,

$$P(t) = \Re \left[\frac{\epsilon_0}{2} (A + iB) \chi(\omega_0) e^{-i\omega_0 t} \right] = \Re[P_c(t)], \quad (70)$$

con $P_c = \epsilon_0 \chi(\omega_0) E_c(t)$.

.30

- Con la decomposición espectral de las relaciones constitutivas podemos escribir las versiones armónicas de las ecuaciones de Maxwell en medio materiales (sin cargas libres):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\omega) &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{H}(\omega) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\omega) &= -i\omega\mu(\omega)\vec{H}(\omega) & \vec{\nabla} \times \vec{H}(\omega) &= -i\omega\epsilon(\omega)\vec{E}(\omega), \end{aligned} \quad (71)$$

con

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0(1 + \chi(\omega)) + i\frac{\sigma(\omega)}{\omega}. \quad (72)$$

- Notamos que la susceptibilidad y la conductividad ambas contribuyen a la parte imaginaria de ϵ :

$$\Im(\epsilon) = \epsilon_0\Im(\chi) + \Re(\sigma/\omega). \quad (73)$$

.31

2.4. Relaciones de Kramers-Kronig

- De consideraciones físicas podríamos haber intuido que

$$\vec{P}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t')\vec{E}(t')dt'. \quad (74)$$

- Supongamos que $\vec{E} = \delta(t - t_0)\vec{E}_0$. Entonces, $\vec{P}(t) = G(t, t_0)\vec{E}_0$, y G es la polarización que resulta de un campo eléctrico delta-unitario.
- Si las propiedades del medio no cambian en el tiempo, $G(t, t_0) = G(t - t_0)$, y recuperamos Ec. 66.
- Notemos que causalidad requiere que $G(\tau) = 0$ si $\tau < 0$.
- Entonces,

$$\epsilon_0\chi(\omega) = \int_0^{\infty} dtG(t)e^{i\omega t}. \quad (75)$$

.32

- Extendemos Ec. 75 al plano complejo, con $\tilde{\omega} = \omega_R + i\omega_I$, con $\omega_I > 0$.

$$\epsilon_0\chi(\tilde{\omega}) = \int_0^{\infty} dtG(t)e^{i\tilde{\omega}t}. \quad (76)$$

- Si $\int_0^{\infty} |G(t)|dt$ converge, también $\int_0^{\infty} G(t)e^{i\tilde{\omega}t}dt$ converge, y $\chi(\tilde{\omega})$ es analítica en el plano \mathbb{C} superior ($\omega_I > 0$).
- Entonces $\chi(\tilde{\omega})/(\tilde{\omega} - \omega)$, donde ω es un punto en el eje real, es analítica excepto en el polo $\tilde{\omega} = \omega$.

- Podemos aplicar el teorema de Kramers-Kronig, que da

$$i\pi\chi(\omega) = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\Omega)}{\Omega + \omega} d\Omega, \quad (77)$$

donde P indica el ‘valor principal’ de Cauchy,

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\Omega)}{\Omega + \omega} d\Omega = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\omega-a} \frac{\chi(\Omega)}{\Omega + \omega} d\Omega + \int_{\omega+a}^{\infty} \frac{\chi(\Omega)}{\Omega + \omega} d\Omega \right). \quad (78)$$

- Usando que $\chi^*(\omega) = \chi(-\omega)$ podemos integrar solo en $\Omega > 0$, y con $\chi = \chi_R + i\chi_I$, reescribir Ec. 78:

$$\chi_R(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\Omega \chi_I(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega, \quad (79)$$

$$\chi_I(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\chi_R(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega. \quad (80)$$

- Se cumplen relaciones similares para μ y σ .

2.5. Propagación en un medio

- Extendemos ahora las soluciones en ondas planas monocromáticas a medio homogéneos. Inyectamos

$$\vec{E}_c = \vec{E}_o e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \text{ y } \vec{H}_c = \vec{H}_o e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (81)$$

en las ecuaciones de Maxwell.

- Ahora permitimos que $\vec{k} \in \mathbb{C}$,

$$\vec{E}_c = \vec{E}_o e^{-\vec{k}_I \cdot \vec{x}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}. \quad (82)$$

- Las ecuaciones Ec. 71 dan:

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{E}_o &= 0 & \vec{k} \cdot \vec{H}_o(\omega) &= 0 \\ \vec{k} \times \vec{E}_o &= \omega \mu \vec{H}_o, & \vec{k} \times \vec{H}_o &= -\omega \epsilon \vec{E}_o. \end{aligned} \quad (83)$$

- Y $\vec{k} \cdot \vec{k} = \omega^2 \epsilon \mu$ (tarea),

$$k_R^2 - k_I^2 + 2i\vec{k}_I \cdot \vec{k}_R = \omega^2 \epsilon \mu. \quad (84)$$

- En el caso de una onda homogénea,

$$\vec{k} = \underbrace{(k_R + ik_I)}_k \hat{e},$$

y $k = \omega N/c$, donde N es el índice de refracción complejo,

$$N = c\sqrt{\epsilon\mu} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}.$$

- Ponemos $N = n + i\kappa$, con n y κ en \mathbb{R}^+ .
- Ec. 82 da:

$$\vec{E}_c = \vec{E}_0 e^{-\frac{2\pi}{\lambda}\kappa z} e^{i(\frac{2\pi n z}{\lambda} - i\omega t)}. \quad (85)$$

- \Rightarrow la parte imaginaria de N corresponde a absorción.

.36

- Se pueden aplicar las relaciones de Kramers-Kronig a $(N(\omega) - 1)$ (el -1 es porque $\lim_{\omega \rightarrow \infty} N(\omega) = 1$):

$$\begin{aligned} n(\omega) - 1 &= \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\Omega \kappa(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega \\ \kappa(\omega) &= -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^\infty \frac{n(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega \end{aligned} \quad (86)$$

- Vemos que la absorción en un medio está relacionada con el índice de refracción real.

.37

3. Radiación

3.1. Zona de ondas

- Consideramos fuentes armónicas (el caso general se obtiene por superposición):

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}, t) &= \rho(\vec{x}) e^{-i\omega t}, \\ \vec{J}(\vec{x}, t) &= \vec{J}(\vec{x}) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (87)$$

- Vimos que en presencia de fuentes el campo $\vec{A}(\vec{x}, t)$ generado en el espacio vacío, y sin bordes, es

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \int dt' \frac{\vec{J}(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left(t' + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} - t\right).$$

- Para fuentes armónicas,

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{x}') e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (88)$$

con $k = \omega/c$

.38

- Obtenemos los campos \vec{H} y \vec{E} usando

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (89)$$

y la Ley de Faraday,

$$\vec{E} = \frac{i}{k} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \vec{\nabla} \times \vec{H}. \quad (90)$$

- Consideramos ahora fuentes confinadas en una región cuya dimensión máxima es d . Si $d \ll \lambda$, hay 3 zonas de interés:

- La zona cercana, con $d < r \ll \lambda$, donde $e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|} \sim 1$ y recuperamos el caso estático salvo por $\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x})e^{-i\omega t}$.
- La zona intermediara con $d \ll r \sim \lambda$.
- La zona lejana, con $\lambda \ll r$.

- En la zona lejana, con $\lambda \ll r$, $|\vec{x} - \vec{x}'| \approx r - \hat{n} \cdot \vec{x}'$, donde $\hat{n} = \vec{x}/x \Rightarrow$

$$\lim_{kr \rightarrow \infty} \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{J}(\vec{x}') e^{-ik\hat{n} \cdot \vec{x}'} d^3x'. \quad (91)$$

- Vemos que $\vec{A}(x, t) = \vec{A}(\vec{x})e^{-i\omega t}$ representa una onda esférica viajando hacia afuera.
- Además, podemos ver (tarea) usando Ecs 89 y 90 que \vec{E} y \vec{H} también son ondas esféricas transversas a \hat{n} .
- La zona lejana corresponde entonces a la *zona de radiación*, también llamada *zona de ondas*.

3.2. Radiación dipolar

- Ahora usamos que $d \ll \lambda$ para simplificar \vec{A} en la zona de ondas. El integrando de Ec. 91 se puede expandir en potencias de $-ik\hat{n} \cdot \vec{x}'$, usando

$$e^{-ik\hat{n} \cdot \vec{x}'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} (\hat{n} \cdot \vec{x}')^n.$$

- Entonces,

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \int \vec{J}(\vec{x}') (\hat{n} \cdot \vec{x}')^n d^3x'. \quad (92)$$

- Para $n = 0$, correspondiente al término dominante en la expansión en $k\hat{n} \cdot \vec{x}'$, tenemos:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \vec{J}(\vec{x}') d^3x'. \quad (93)$$

- Usando la ecuación de continuidad, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, tenemos $i\omega\rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$.
- Entonces (tarea):

$$\int \vec{J}(\vec{x}') = - \int \vec{x}' (\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}) d^3x' = -i\omega \int \vec{x}' \rho(\vec{x}') d^3x'. \quad (94)$$

- Finalmente,

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{-i\mu_o\omega}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \underbrace{\vec{p}}_{\text{momento dipolar eléctrico}} = \int \vec{x}' \rho(\vec{x}') d^3x'. \quad (95)$$

- Obtenemos ahora los campos \vec{E} y \vec{H} :

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{ck^2}{4\pi} (\hat{n} \times \vec{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \\ \vec{E} &= \sqrt{\mu_o\epsilon_o} \vec{H} \times \hat{n}. \end{aligned} \quad (96)$$

, donde constatamos que la radiación dipolar eléctrica es polarizada linealmente.

- La potencia emitida en dirección \hat{n} se puede escribir con $dP = r^2 d\Omega \hat{n} \cdot \vec{S} \Rightarrow$,

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{1}{2} \Re \left[r^2 \hat{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) \right], \\ &= \frac{c^2}{32\pi^2} \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} k^4 |\vec{p}|^2 \sin(\theta). \end{aligned} \quad (97)$$

- La potencia total emitida es

$$P = \frac{c^2 k^4}{12\pi} |\vec{p}|^2. \quad (98)$$

- El siguiente término en la expansión de $e^{-ik\hat{n} \cdot \vec{x}'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} (\hat{n} \cdot \vec{x}')^n$ corresponde al $n = 1$.
- Ec. 92 da:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \int \vec{J}(\vec{x}') (\hat{n} \cdot \vec{x}') d^3x'. \quad (99)$$

- Veamos que este término da origen a una contribución *dipolar magnética* y *cuadrupolar eléctrica*. Para ello, separamos el integrando:

$$\vec{J}(\vec{x}')(\hat{n} \cdot \vec{x}') = \underbrace{\frac{1}{2} [(\hat{n} \cdot \vec{x}')\vec{J} + (\hat{n} \cdot \vec{J})\vec{x}']}_A + \underbrace{\frac{1}{2}(\vec{x}' \times \vec{J}) \times \hat{n}}_B. \quad (100)$$

- Consideramos primero la contribución de la parte *B*. Reconocemos la magnetización \mathcal{M} ,

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2}(\vec{x}' \times \vec{J}). \quad (101)$$

- Para la parte *B*, entonces,

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{ik\mu_0}{4\pi}(\hat{n} \times \vec{m})\frac{e^{ikr}}{r}\left(1 - \frac{1}{ikr}\right), \quad \text{con} \quad (102)$$

$$\vec{m} = \int \mathcal{M} d^3x. \quad (103)$$

- En la zona de radiación, $kr \gg 1$, obtenemos (**tarea**):

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{ik\mu_0}{4\pi}(\hat{n} \times \vec{m})\frac{e^{ikr}}{r}, \quad (104)$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\frac{k^2}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}(\hat{n} \times \vec{m})\frac{e^{ikr}}{r}, \quad (105)$$

$$\vec{H}(\vec{x}) = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}(\vec{E} \times \hat{n}). \quad (106)$$

- Esta contribución se llama radiación dipolar magnética.

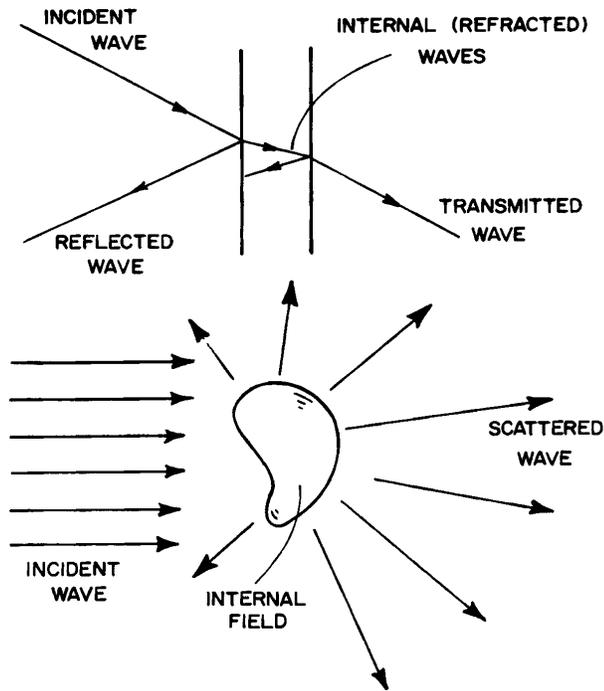
- Para la parte *A* de la contribución $n = 1$, de un manejo estandar se tiene:

$$A = \frac{i\omega}{2} \int \vec{x}'(\hat{n} \cdot \vec{x}')\rho(\vec{x}')d^3x', \quad (107)$$

lo cual representa momentos de orden 2 de $\rho(\vec{x}')$, o sea es una contribución cuadrupolar eléctrica, que no desarrollaremos.

4. Scattering y difracción

4.1. Scattering en régimen de Rayleigh



.47

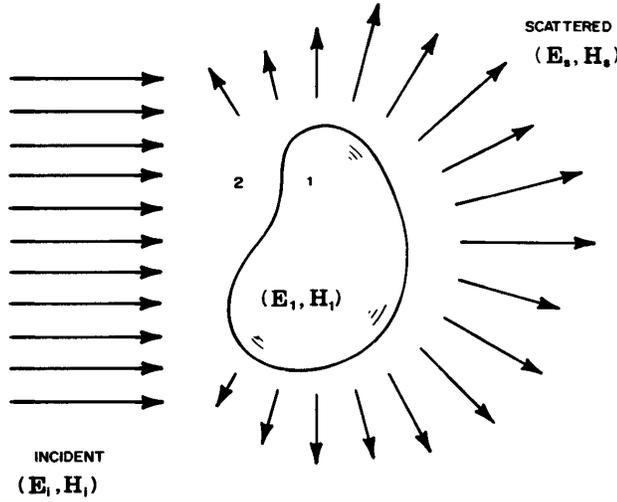
- Consideramos primero un solo obstáculo (o partícula), con dimensión máxima $d \ll \lambda$.
- Describimos la ondas incidente con

$$\vec{E}_i = \hat{e}_o E_o e^{ik\hat{n}_o \cdot \vec{x}} \quad (108)$$

$$\vec{H}_i = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} \hat{n}_o \times \vec{E}_i. \quad (109)$$

- Notar que la polarización incidente corresponde al vector \hat{e}_o .
- Al interactuar con el blanco, los campos inducen dipolos eléctricos y magnéticos como si fuesen campos estáticos en la 'zona estática' (salvo por la dependencia en $\exp(-i\omega t)$).
- Los dipolos inducidos pueden a su vez general radiación dipolar eléctrica y magnética, con campos \vec{E}_s y \vec{H}_s .

.48



.49

- En la zona de ondas y en el régimen de Rayleigh, en dirección \hat{n} tenemos (de Ec. 96 y 105),

$$\vec{E}_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \left[(\hat{n} \times \vec{p}) \times \hat{n} - \hat{n} \times \frac{\vec{m}}{c} \right] \quad (110)$$

$$\vec{H}_s = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \hat{n}_o \times \vec{E}_s. \quad (111)$$

- Extendemos el concepto de $\frac{dP}{d\Omega}$ para seleccionar un estado de polarización \hat{e} de la onda dispersada, y normalizando por el flujo incidente:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\hat{n}, \hat{e}; \hat{n}_o, \hat{e}_o) &= r^2 \frac{|\hat{e}^* \cdot \vec{E}_s|^2}{|\hat{e}_o^* \cdot \vec{E}_i|^2}, \Rightarrow \\ \frac{d\sigma}{d\Omega}(\hat{n}, \hat{e}; \hat{n}_o, \hat{e}_o) &= \frac{k^4}{(4\pi\epsilon_0 E_o)^2} \left| \hat{e}^* \cdot \vec{p} + (\hat{n} \times \hat{e}^*) \cdot \frac{\vec{m}}{c} \right|^2. \end{aligned} \quad (112)$$

.50

- Como ejemplo consideramos que el blanco es una pequeña esfera dieléctrica, con radio a , $\mu/\mu_0 = \mu_r = 1$, y con $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega)$.
- En la zona estática, donde $d \ll r \ll \lambda$, los campos son cuasiestáticos y (tarea)

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) a^3 \vec{E}_i, \quad (113)$$

y no hay dipolo magnético.

- La sección eficaz de scattering es entonces, para polarización \hat{e} ,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 a^6 \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2 |\hat{e}^* \cdot \hat{e}_o|^2. \quad (114)$$

.51

- Podemos promediar para el caso de radiación incidente no polarizada (luz natural):

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle = k^4 a^6 \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2 \langle |\hat{e}^* \cdot \hat{e}_o|^2 \rangle. \quad (115)$$

- Obtenemos para las polarización paralelas y perpendiculares al plano de scattering (\hat{n}, \hat{n}_o) (tarea, usando coordenadas esféricas con \hat{n}_o según \hat{z}):

$$\frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} = \frac{1}{2} k^4 a^6 \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2 \cos^2(\theta) \quad (116)$$

$$\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{1}{2} k^4 a^6 \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2 \quad (117)$$

- Para Stokes I tenemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 a^6 \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2 \frac{1}{2} (1 + \cos^2(\theta)), \quad (118)$$

y una medida de la fracción de polarización sería $\Pi(\theta) \equiv \left(\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} - \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} \right) / I = \frac{\sin^2(\theta)}{1 + \cos^2(\theta)}$.

4.2. Scattering por N blancos

- Si consideramos ahora un sistema de N blancos, usamos el principio de superposición

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\hat{n}, \hat{e}; \hat{n}_o, \hat{e}_o) = r^2 \frac{|\hat{e}^* \cdot \sum_{j=1}^N \vec{E}_{s,j}|^2}{|\hat{e}_o^* \cdot \vec{E}_i|^2}. \quad (119)$$

- En la zona de ración, $|\vec{x} - \vec{x}'| \sim r - \hat{n} \cdot \vec{x}'$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4}{(4\pi\epsilon_o E_o)^2} \left| \sum_{j=1}^N \left[\hat{e}^* \cdot \vec{p}_j + (\hat{n} \times \hat{e}^*) \cdot \frac{\vec{m}_j}{c} \right] e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}_j} \right|^2, \quad (120)$$

donde $q = k\hat{n}_o - k\hat{n}$ y $\{x_j\}$ son las posiciones de los blancos.

- Si todos los blancos son idénticos,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega}_1 \mathcal{F}(\vec{q}), \quad \text{donde } \mathcal{F}(\vec{q}) = \left| \sum_j e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}_j} \right|^2. \quad (121)$$

- Si las posiciones \vec{x}_j son aleatorias (**tarea**),

$$\langle \mathcal{F}(\vec{q}) \rangle = \left\langle \left| \sum_j e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}_j} \right|^2 \right\rangle \approx N, \quad (122)$$

y

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx N \frac{k^4}{(4\pi\epsilon_o E_o)^2} \left| \sum_{j=1}^N \left[\hat{e}^* \cdot \vec{p}_j + (\hat{n} \times \hat{e}^*) \cdot \frac{\vec{m}_j}{c} \right] e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}_j} \right|^2. \quad (123)$$

.54

- Si los blancos están dispuestos regularmente, por ejemplo en una red cúbica $N_1 \times N_2 \times N_3$ con espaciamento a (**tarea**),

$$\mathcal{F}(\vec{q}) = N^2 \left[\frac{\sin^2(\frac{1}{2}N_1 q_1 a) \sin^2(\frac{1}{2}N_2 q_2 a) \sin^2(\frac{1}{2}N_3 q_3 a)}{N_1^2 \sin^2(\frac{1}{2}q_1 a) N_2^2 \sin^2(\frac{1}{2}q_2 a) N_3^2 \sin^2(\frac{1}{2}q_3 a)} \right], \quad (124)$$

donde $q = q_1 \hat{e}_1 + q_2 \hat{e}_2 + q_3 \hat{e}_3$.

.55

4.3. Difracción

- El problema de difracción es similar al de scattering, excepto que especificamos los valores de los campos en los bordes de las superficies blancos.
- Consideremos un campo escalar $\psi(\vec{x}, t)$ que satisface la ecuación de ondas. Para una componente armónica, con dependencia temporal $\exp(-i\omega t)$,

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\vec{x}) = 0. \quad (125)$$

- Queremos resolver esta ecuación para una onda reflectada/transmitida por una superficie \mathcal{S}_1 . Cerramos el espacio con otra superficie \mathcal{S}_2 , que llevaremos a ∞ .

.56

- Típicamente usamos $\psi = 0$ en \mathcal{S}_1 , salvo en posible aperturas.
- Introducimos una función de Green G_D :

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = G(\vec{x}, \vec{x}') + F(\vec{x}, \vec{x}'), \quad (126)$$

donde

$$(\nabla^2 + k^2)G(\vec{x}, \vec{x}') = -\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (127)$$

y

$$(\nabla^2 + k^2)F(\vec{x}, \vec{x}') = 0. \quad (128)$$

- Ajustamos F tal que $G_D(\vec{x}, \vec{x}') = 0$ si $\vec{x} \in \mathcal{S}_1$.

.57

- El teorema de Green (luego de extenderlo a la ecuación de Helmholtz Ec. 125, **tarea**), da, usando el par de funciones G_D y ψ ,

$$\psi(\vec{x}) = \oint_S \left[\psi(\vec{x}') \hat{n}' \cdot \vec{\nabla}' G_D(\vec{x}, \vec{x}') - G_D(\vec{x}, \vec{x}') \hat{n}' \cdot \vec{\nabla}' \psi(\vec{x}') \right] dS' \quad (129)$$

y usando las propiedad que $G_D(\vec{x}, \vec{x}') = 0$ si $\vec{x}' \in S$,

$$\psi(\vec{x}) = \oint \left[\psi(\vec{x}') \hat{n}' \cdot \vec{\nabla}' G_D(\vec{x}, \vec{x}') \right] dS'. \quad (130)$$

- Notamos la ausencia de integral de volumen en la aplicación del teorema de Green en Ec. 130, que refleja la ausencia de fuentes en la ecuación de ondas.

.58

- Como ejemplo particularizamos al caso en que S_1 es un plano infinito (en $z = 0$).
- Sabemos que de Ec. 19 que G esta dado por:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad \text{con } \vec{R} = \vec{x} - \vec{x}'. \quad (131)$$

- Usamos el método de imágenes para determinar F :

$$F = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR'}}{R'}, \quad \text{con } \vec{R}' = \vec{x} - \vec{x}'', \quad (132)$$

donde \vec{x}'' es el simétrico de \vec{x} relativo a $z = 0$.

- Por diseño la función de Green

$$G_D(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{ikR'}}{R'} \right), \quad (133)$$

se anula en $\vec{x}' \in S_1$.

.59

- Inyectando G_D (Ec. 133) en el teorema de Green (Ec. 130) llegamos a (**tarea**):

$$\psi(\vec{x}) = \frac{k}{2\pi i} \oint_{S_1} \psi(\vec{x}') \frac{\hat{n}' \cdot \vec{R}}{R^2} e^{ikR} \left[1 - \frac{1}{ikR} \right] dS', \quad (134)$$

donde hemos usado que al llevar S_2 a ∞ , $\psi \sim e^{ikR}/R$ en S_2 , y $\nabla' G_D \sim 1/R^2$, de manera que el integrando en S_2 decae mas rápido que $(1/R^2)$.

- Si consideramos que $\psi(\vec{x}') = 0$ en S_1 salvo en una apertura, en el límite $z \rightarrow \infty$, $\frac{\hat{n}' \cdot \vec{R}}{R} \sim 1$,

$$\psi(\vec{x}) = \frac{k}{2\pi i} \int_{\text{apertura}} \frac{e^{ikR}}{R} \psi(\vec{x}') dS', \quad (135)$$

y reconocemos las fuentes secundarias del principio de Huygens.

.60

- Un cálculo detallado para el caso vectorial da (ver Jackson 10.6 y 10.7), para el campo eléctrico difractado por una apertura en un plano conductor en $z = 0$,

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \vec{\nabla} \times \int (\hat{n} \times \vec{E}_i) \frac{e^{ikR}}{R} dS'. \quad (136)$$

- En la región $z \rightarrow \infty$, esperamos que \vec{E} sea ondulario, y si \vec{E}_i es una onda plana,

$$\vec{E}(\vec{x}) \approx \frac{ik}{2\pi} \hat{n} \times (\hat{n}' \times \vec{E}_i) \int \frac{e^{ikR}}{R} dS'. \quad (137)$$

.61

5. Relatividad

5.1. Cuadrivectores

En esta Section usamos unidades CGS, mas adaptadas para describir la simetría entre \vec{E} y \vec{B} . Bibliografía: Rybicki & Lightman.

- Definimos $x^\mu = (ct, x, y, z)$, cuadrivector posición contrariante, con norma $s^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ (con convención de suma).
- También introducimos $x_\mu = (-ct, x, y, z)$, cuadrivector posición covariante.
- $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$, con

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (138)$$

- Con $\eta^{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu}$, tenemos $x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$.
- Notar que $\eta^{\mu\sigma} \eta_{\sigma\nu} = \delta_\nu^\mu$.

.62

- Cambiamos de sistema de referencia de \mathcal{S} a \mathcal{S}' , en movimiento uniforme con velocidad v según \hat{x} relativo a \mathcal{S} .
- Un 4V contravariante transforma con

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \text{ donde } \Lambda^\mu_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (139)$$

con $\beta = v/c$, y $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

- Para un 4V covariante (tarea),

$$x'_\mu = \tilde{\Lambda}_\mu^\nu x_\nu, \text{ con } \tilde{\Lambda}_\mu^\nu = \eta_{\mu\tau} \Lambda^\tau_\sigma \eta^{\sigma\nu}. \quad (140)$$

- $\tilde{\Lambda}_\mu^\nu$ es la inversa de Λ^μ_ν :

$$\Lambda^\sigma_\nu \tilde{\Lambda}_\sigma^\mu = \delta_\nu^\mu, \text{ y } \tilde{\Lambda}_\mu^\alpha x'^\mu = x^\alpha. \quad (141)$$

.63

- El producto punto entre dos 4V A^μ y B^μ es invariante de Lorents:

$$A^\mu B_\mu = A'^\mu B'_\mu. \quad (142)$$

- También tenemos el 4V velocidad, $U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$, en que $d\tau$ es el intervalo relativista (i.e. de tiempo propio) entre x^μ y $x^\mu + dx^\mu$.
- En componentes (**tarea**), $U^\mu = \gamma_u(c, \vec{u})$, con $\gamma_u = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$.
- Si pasamos a $U' = \Lambda^\mu_\nu U^\nu$,

$$\gamma_{u'} = \gamma\gamma_u(1 - \frac{uv}{c^2} \cos(\theta)), \quad \text{con } \theta = \angle(\vec{u}, \vec{v}). \quad (143)$$

- En el sistema ligado a una partícula con velocidad \vec{u} , $U' = c(1, \vec{0})$, y para un 4V A^μ ,

$$A'^0 = -\frac{1}{c}U^\mu A_\mu = -\frac{1}{c}U'^\mu A'_\mu. \quad (144)$$

- Notemos que la fase de una onda plana debe ser invariante de Lorentz porque la anulación de \vec{E} y de \vec{B} simultaneamente en un sistema implica su anulación en cualquier otro sistema.
- Introducimos $k^\mu = (\omega/c, \vec{k})$:

$$k^\mu x_\mu = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \text{invariante} \Rightarrow k^\mu \text{ es 4V.} \quad (145)$$

- Usamos Ec. 144 para deducir el efecto Doppler relativista (**tarea**)

$$ck'^0 = \omega' = -U^\mu k_\mu = \omega\gamma(1 - \frac{v}{c} \cos(\theta)). \quad (146)$$

- Otro ejemplo importante de 4V es el gradiente. Si λ es un escalar (invariante), entonces

$$\lambda_{,\mu} \equiv \frac{\partial \lambda}{\partial x^\mu} \text{ es 4V covariante, y} \quad (147)$$

$$\lambda^{,\mu} \equiv \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu} \text{ es 4V contravariante.} \quad (148)$$

- Demo: de $x^\nu = \tilde{\Lambda}^\nu_\mu x'^\mu$, tenemos que $\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \tilde{\Lambda}^\nu_\mu$, y como $\lambda' = \lambda$,

$$\lambda'_{,\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \lambda}{\partial x^\nu}. \quad (149)$$

- Extendemos las propiedades de los 4V a tensores en general: un tensor de orden n transforma como el productor de n 4Vs.
- Por ejemplo,

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\tau T^{\sigma\tau},$$

$$T'^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\sigma \tilde{\Lambda}^\tau_\nu T^\sigma_\tau.$$

5.2. Covarianza en electrodinámica

- La conservación de carga, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, se puede escribir

$$J^\mu_{,\mu} = 0, \text{ con la cuadricorriente } J^\mu = (\rho c, \vec{J}). \quad (150)$$

- En el Gauge de Lorentz, y usando CGS,

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J} = \partial_\alpha \partial^\alpha \vec{A}, \quad (151)$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho = \partial_\alpha \partial^\alpha \Phi. \quad (152)$$

- Con $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$,

$$A^\beta_{,\alpha} = -\frac{4\pi}{c} J^\beta, \text{ en que } A^\beta_{,\alpha} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x^\alpha} A^\beta. \quad (153)$$

- El Gauge de Lorentz $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ se escribe simplemente $A^\alpha_{,\alpha} = 0$.

.67

- Para escribir las ecuaciones de Maxwell en forma covariante, introducimos el tensor de campos

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}. \quad (154)$$

- Con $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ y $\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ (tarea):

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (155)$$

- Las ecuaciones de Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$ y $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$ se escriben (tarea)

$$F_{\mu\nu}{}^{,\nu} = \frac{4\pi}{c} J_\mu. \quad (156)$$

- Las ecuaciones internas $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ y $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ se escriben (tarea)

$$F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\sigma\mu,\nu} + F_{\nu\sigma,\mu} = 0. \quad (157)$$

.68

- Usamos la covarianza de $F_{\mu\nu}$ para deducir las leyes de transformación de los campos \vec{E} y \vec{B} :

$$F'_{\mu\nu} = \tilde{\Lambda}_\mu^\alpha \tilde{\Lambda}_\nu^\beta F_{\alpha\beta}. \quad (158)$$

- Por componentes, obtenemos (**tarea**):

$$\begin{aligned} E'_\parallel &= E_\parallel, & B'_\parallel &= B_\parallel, \\ E'_\perp &= \gamma(\vec{E}_\perp + \vec{\beta} \times \vec{B}), & B'_\perp &= \gamma(\vec{B}_\perp + \vec{\beta} \times \vec{E}). \end{aligned} \quad (159)$$

- Vemos que se mezclan \vec{E} y \vec{B} , y si $\vec{B} = 0$ en \mathcal{S} , al pasar a \mathcal{S}' tenemos $\vec{B}' \neq 0$.

.69

- Para extender la fuerza de Lorentz, introducimos el 4V momentum $P^\mu = m_o U^\beta$, con m_o masa en reposo. Escribimos $P^\mu = (E/c, \vec{P})$, en que E es la energía total de la partícula (en reposo $E = m_o c^2$).

- La 4-aceleración es

$$a^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau}, \quad (160)$$

y para recuperar la 2nda ley de Newton en el límite no relativista, la 4-fuerza es

$$F^\mu = m_o a^\mu = \frac{dP^\mu}{d\tau}. \quad (161)$$

- Escribimos la 4-fuerza de Lorentz con

$$F^\mu = \frac{q}{c} F^\mu_\nu U^\nu. \quad (162)$$

- En componentes, (**tarea**) $\vec{F} = q(\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}) + q\vec{E}$.

.70